Processus aléatoires
ENS Paris, 2016-2017

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 12 : Révisions
Corrigé

Lundi 2 Janvier

Exercice 1 (Marche aléatoire en milieu aléatoire)
Soient $(\omega_x^+)_{x\in\mathbb{Z}}$ une famille de variables i.i.d. à valeurs dans $]0,1[$. On introduit :

$$\omega_x^- = 1-\omega_x^+, \quad \omega_x = (\omega_x^-, \omega_x^+) \text{ et } \rho_x = \frac{\omega_x^-}{\omega_x^+}.$$

Conditionnellement à ω, on définit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov issue de 0 de loi P_ω telle que pour tout $n \geq 0$,

$$P_\omega\left(X_{n+1}=x+1|X_n=x\right)=\omega_x^+ \text{ et } P_\omega\left(X_{n+1}=x-1|X_n=x\right)=\omega_x^-.$$

Le but de cet exercice est de montrer que

- si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]<0$, alors $\mathbb{P}$-p.s., $P_\omega\left(X_n\to+\infty\right)=1$,
- si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]>0$, alors $\mathbb{P}$-p.s., $P_\omega\left(X_n\to-\infty\right)=1$,
- si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]=0$, alors $\mathbb{P}$-p.s., $P_\omega\left(\limsup X_n=+\infty \text{ et } \liminf X_n=-\infty\right)=1$.

1. Soit $a\leq b$ des entiers, on pose

$$\Pi_{a,b}=\prod_{a<x\leq b}\rho_x \text{ et } f(z)=\begin{cases}\sum_{0\leq x<z}\Pi_{0,x} & \text{si } z\geq 0\\ -\sum_{z\leq x<0}\Pi_{x,0}^{-1} & \text{si } z<0\end{cases}$$

   Montrer que $f(X_n)$ est une martingale sous P_ω pour la filtration canonique.
2. Soient $m_-<0<m_+$. On pose $T_{m_+}=\inf\{n\geq 1: X_n=m_+\}$ et on définit de même T_{m_-}. Calculer $P_\omega\left(T_{m_+}<T_{m_-}\right)$.
3. Lorsque $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]<0$, montrer que $P_\omega\left(\lim X_n=+\infty\right)=1$ p.s.
4. Soit (Z_i) une suite de variables i.i.d. avec $\mathbb{E}[Z_1]=0$ et $\mathbb{E}\left[Z_1^2\right]<+\infty$. Pour tout $n\geq 0$, soit $S_n=\sum_{i=1}^n Z_i$. Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $S_n\geq 0$.
5. Lorsque $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]=0$ et $\mathbb{E}[\log^2(\rho_0)]<\infty$, montrer que $P_\omega\left(\limsup X_n=+\infty, \liminf X_n=-\infty\right)=1$ p.s.

Solution de l'exercice 1

1. On raisonne conditionnellement à ω. Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(X_0,X_1,\dots,X_n)$. Le processus X est bien adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et pour tout n la variable $f(X_n)$ est bornée par $\max_{-n\leq i\leq n} f(i)$, donc intégrable. De plus, par définition de X, si $X_n>0$ alors

$$\begin{aligned}E_\omega\left[f(X_n)|\mathcal{F}_n\right] &= \omega_{X_n}^- f(X_n-1)+\omega_{X_n}^+ f(X_n+1)\\ &= \omega_{X_n}^-\left(f(X_n)-\Pi_{0,X_n-1}\right)+\omega_{X_n}^+\left(f(X_n)+\Pi_{0,X_n}\right)\\ &= f(X_n)-\omega_{X_n}^-\Pi_{0,X_n-1}+\omega_{X_n}^+\Pi_{0,X_n}\\ &= f(X_n).\end{aligned}$$

Les cas $X_n = 0$ et $X_n < 0$ se traitent de manière similaire, et $(f(X_n))_{n\geq 0}$ est bien une martingale sous P_ω.

2. On raisonne toujours conditionnellement à ω. Soit $T = T_{m_+} \wedge T_{m_-}$. On commence par vérifier que $T < +\infty$ p.s. Comme les $\omega_x^\pm$ sont tous > 0, la chaîne de Markov X est irréductible. Si elle est récurrente, elle visite donc une infinité de fois tous les entiers donc $T < +\infty$. Si X est transiente, alors p.s. X_n tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ donc on a aussi $T < +\infty$.
De plus, d'après le théorème d'arrêt, on a
$$E_\omega\left[f\left(X_{T\wedge n}\right)\right] = E_\omega\left[f(X_0)\right] = 0$$
pour tout $n \geq 0$. Comme les variables $f\left(X_{T\wedge n}\right)$ sont uniformément bornées, par convergence dominée on en déduit
$$P_\omega\left(T_{m_-} < T_{m_+}\right) f(m_-) + P_\omega\left(T_{m_+} < T_{m_-}\right) f(m_+) = E_\omega\left[f\left(X_T\right)\right] = 0,$$
d'où
$$P_\omega\left(T_{m_+} < T_{m_-}\right) = \frac{f(m_-)}{f(m_-) + f(m_+)}.$$

3. Les ρ_i sont des copies i.i.d. de ρ_0. Par conséquent, d'après la loi des grands nombres, pour tout $x < 0$ on a
$$\log \Pi_{x,0}^{-1} = \sum_{i=x}^{-1} - \log \rho_i \xrightarrow[x\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty,$$
donc $\Pi_{x,0}^{-1} \to +\infty$ p.s. quand $x \to -\infty$ et $f(z) \to +\infty$ p.s. quand $z \to -\infty$. De même, toujours par loi des grands nombres, on a
$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \log \Pi_{0,x} < 0$$
p.s., i.e. $\Pi_{0,x}$ décroît à vitesse exponentielle quand $x \to +\infty$, donc $f(z)$ admet une limite finie $\ell > 0$ quand $z \to +\infty$. Soit $m_- < 0$. On a donc p.s.
$$P_\omega\left(T_{m_-} < +\infty\right) = \lim_{m_+\to+\infty} P_\omega\left(T_{m_-} < T_{m_+}\right) = \lim_{m_+\to+\infty} \frac{f(m_+)}{f(m_-) + f(m_+)} = \frac{\ell}{f(m_-) + \ell},$$
d'où
$$P_\omega\left(T_{m_-} < +\infty\right) \xrightarrow[m_-\to-\infty]{} 0.$$
Comme X est irréductible, elle ne peut donc pas être récurrente, donc elle est transiente et $P_\omega\left(X_n \to +\infty\right) = 1$ p.s., donc $\mathbb{P}\left(X_n \to +\infty\right) = 1$. Le cas $\mathbb{E}\left[\log \rho_0\right] > 0$ se traite de manière identique.

4. Soit $\sigma^2 = \mathbb{E}\left[Z_1^2\right]$. Si $\sigma = 0$ alors $S_n = 0$ pour tout n et le résultat est immédiat. Sinon, l'idée est d'appliquer le lemme de Borel-Cantelli le long d'une sous-suite (n_k) qui croît très vite, de telle sorte que les valeurs S_{n_k} sont presque indépendantes. On prend $n_k = 2^{2^k}$, ce qui donne $n_{k+1} = n_k^2$. Les incréments $S_{n_{k+1}} - S_{n_k}$ sont indépendants et, par théorème centrale limite, on a
$$\frac{1}{\sqrt{n_{k+1} - n_k}} \left(S_{n_{k+1}} - S_{n_k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
donc
$$\frac{1}{n_k} \left(S_{n_{k+1}} - S_{n_k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$
On en déduit que $\liminf_k \mathbb{P}\left(\frac{1}{n_k}\left(S_{n_{k+1}} - S_{n_k}\right) > 1\right) > 0$, donc d'après Borel-Cantelli, p.s. cet événement se produit une infinité de fois. D'autre part, par loi des grands nombres, comme S est centrée on a $S_{n_k} > -n_k$ pour k assez grand donc il existe une infinité de k tels que $S_{n_{k+1}} > 0$.

5. On va chercher à adapter la preuve de la question 3. On sait d'après les hypothèses que $(\log \Pi_{0,x})_{x\geq 0}$ est une marche aléatoire centrée de carré intégrable, donc d'après la question 4 il existe une infinité de $x \geq 0$ tels que $\log \Pi_{0,x}$, soit $\Pi_{0,x} \geq 1$. On en déduit $f(z) \to +\infty$ quand $z \to +\infty$. De même, il existe une infinité de $x \leq 0$ tels que $\log \Pi_{x,0} < 0$ donc $\Pi_{x,0}^{-1} > 1$, d'où $\lim_{z\to-\infty} f(z) = -\infty$ p.s.
La fin du raisonnement est similaire à celui de la question 3 : on a p.s.
$$P_\omega\left(T_{m_-} < +\infty\right) = \lim_{m_+\to+\infty} P_\omega\left(T_{m_-} < T_{m_+}\right) = \lim_{m_+\to+\infty} \frac{f(m_+)}{f(m_-)+f(m_+)} = 1,$$
donc $T_{m_-} < +\infty$ pour tout $m_- \leq 0$, donc $\liminf X_n = -\infty$ p.s., et de même $\limsup X_n = +\infty$ p.s.

Exercice 2 (Une **s**uite de **f**lips)
Soit $n \geq 4$. On considère un polygone régulier $\mathscr{P}_n$ à n sommets, numérotés de 1 à n. Une *triangulation* de $\mathscr{P}_n$ est une manière de tracer $n-3$ diagonales de $\mathscr{P}_n$ qui divisent $\mathscr{P}_n$ en $n-2$ triangles. On note $\mathscr{T}_n$ l'ensemble des triangulations de $\mathscr{P}_n$.

Si $t \in \mathscr{T}_n$ et d est une des diagonales de t, on peut supprimer d, ce qui crée un quadrilatère, et remplacer d par l'autre diagonale de ce quadrilatère (on dit alors qu'on *flippe* d). On obtient ainsi une triangulation qu'on note $\mathfrak{flip}(t,d)$.

On se fixe $t_0 \in \mathscr{T}_n$ et on définit $(T_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante : $T_0 = t_0$ et, pour tout $n \geq 0$, conditionnellement à $(T_0,\dots,T_n)$, on choisit uniformément une diagonale d_n de T_n et on pose $T_{n+1} = \mathfrak{flip}(T_n, d_n)$.

1. Vérifier que (T_n) est une chaîne de Markov sur $\mathscr{T}_n$ et qu'elle admet la mesure uniforme comme mesure stationnaire.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathscr{T}_n$, en partant de t, il est possible d'obtenir en un nombre fini de flips la triangulation où toutes les diagonales sont issues du sommet 1. En déduire que (T_n) est irréductible.
3. La chaîne (T_n) converge-t-elle vers la mesure uniforme ?

Solution de l'exercice 2

1. On vérifie que T est une chaîne de Markov de matrice de transition Q avec
$$Q(t,t') = \begin{cases} \frac{1}{n-3} & \text{si on peut passer de } t \text{ à } t' \text{ par un unique flip,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Conditionnellement à $(T_0,\dots,T_n)$, la diagonale d_n est uniforme dans T_n, donc pour s'assurer que T_{n+1} est uniforme parmi les triangulations "directement accessibles" depuis T_n, il suffit de vérifier que flipper deux arêtes différentes de T_n donne deux triangulations différentes. Ceci est vrai car si $d \neq d'$ sont deux diagonales de T_n, alors $\mathfrak{flip}(T_n,d)$ contient d', ce qui n'est pas le cas de $\mathfrak{flip}(T_n,d')$.
De plus, il est immédiat par la définition de Q que Q admet la mesure uniforme sur $\mathscr{T}_n$ comme mesure réversible, donc stationnaire.
2. Soit t_0 la triangulation dont les $n-3$ diagonales relient 1 à $3,4,\dots,n-1$. On va montrer que si $t \neq t_0$, alors on peut, en flippant une arête de t, augmenter strictement le degré du sommet 1. Cela suffira à conclure car t_0 est la seule triangulation où le degré du sommet 1 est maximal (égal à $n-1$). Si $t \neq t_0$, soit $3 \leq i \leq n-1$ tel que 1 n'est pas relié à i dans t. Soient $j < i$ maximal et $k > i$ minimal tels que 1 est relié à j et k (ils existent car 1 est relié à 2 et n). Alors $(1,j,k)$ doit être un des triangles de t, donc j est relié à k. On a de plus $k-j \geq 2$ donc l'arête entre j et k est bien une diagonale. En flippant cette diagonale, le degré de 1 augmente de 1.
On en déduit $Q^{n-3}(t,t_0) > 0$ pour tout $t \in \mathscr{T}_n$ (le degré augmente de 1 à chaque étape et démarre au moins à 2, donc met au plus $n-3$ étapes à atteindre $n-1$). Par réversibilité, on a $Q^{n-3}(t_0,t') > 0$ pour tout $t' \in \mathscr{T}_n$, donc $Q^{2n-6}(t,t') > 0$ pour tous $t,t' \in \mathscr{T}_n$, et Q est bien irréductible.
3. D'après les deux questions précédentes, il suffit de déterminer si la chaîne (T_n) est apériodique. Pour $n=4$, elle ne l'est pas. En effet, on vérifie facilement $|\mathscr{T}_4| = 2$, et on a $T_{n+1} \neq T_n$ pour tout n donc T est périodique de période 2.
Soit maintenant $n \geq 5$. On a $Q^2(t,t) > 0$ pour tout t (flipper deux fois la "même" diagonale) donc la période de T vaut 1 ou 2. Par ailleurs, pour $n=5$, on peut réaliser les opérations de la figure 1,

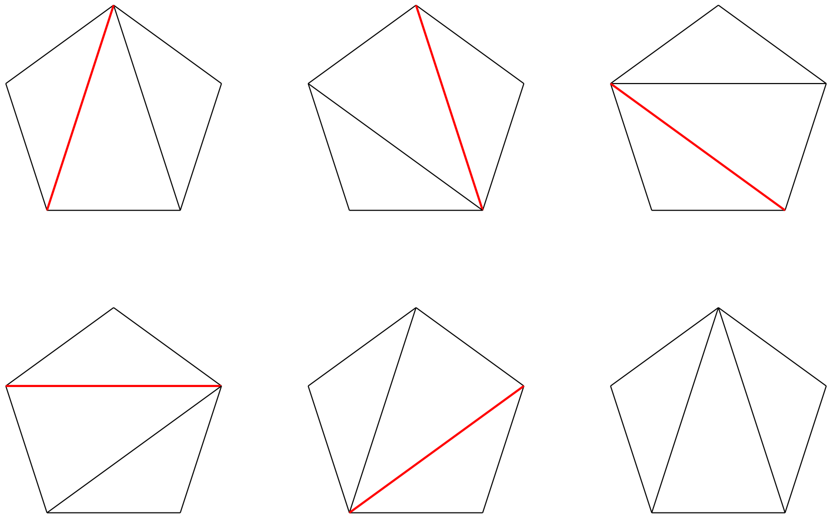

FIGURE 1 – En 5 flips, on revient à la triangulation de départ.

ce qui montre qu'il existe t telle que $Q^5(t,t) > 0$. La période de la chaîne divise donc 5, donc elle vaut 1 et T est apériodique. Pour $n \geq 6$, il suffit d'isoler un pentagone et de faire les mêmes flips que sur la figure 1 à l'intérieur de ce pentagone pour obtenir le même résultat. On a donc convergence de T_n vers la mesure uniforme si et seulement si $n \geq 5$.

Remarque Si la chaîne obtenue n'est pas apériodique, une manière naturelle de la rendre apériodique est de lui donner à chaque étape une probabilité > 0 de ne pas bouger. Par exemple, avec probabilité p on a $T_{n+1} = T_n$ et avec probabilité $1 - p$ on flippe une arête uniforme.

Exercice 3 Soit G un graphe connexe, infini et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins). Montrer que la marche aléatoire simple sur G ne peut pas être récurrente positive.

Solution de l'exercice 3 On raisonne par l'absurde. Si la marche simple sur G est récurrente positive, alors en particulier elle est récurrente. De plus, par connexité de G elle est aussi irréductible, donc elle admet une unique (à constante multiplicative près) mesure stationnaire, et cette mesure est finie. Or, en posant $\mu(x) = \deg(x)$, on vérifie facilement que μ est réversible, donc stationnaire. De plus, on a $\mu(x) \geq 1$ pour tout x, donc comme G est infini la mesure μ est infinie, d'où la contradiction.