Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2016-2017 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 1 : Vers le mouvement brownien

Lundi 19 Septembre

1 Variables gaussiennes et vecteurs gaussiens

On rappelle qu'un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est gaussien si pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)$, la variable $u \cdot X$ est gaussienne. En écrivant $\mu = \mathbb{E}[X]$ la *moyenne* de X et $K = (cov(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq d}$ sa *matrice de covariance*, on a alors pour tout $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}\left[e^{iu \cdot X}\right] = \exp\left(iu \cdot \mu - \frac{1}{2} {}^t u K u\right).$$

Exercice 1 Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien centré, i.e. $\mathbb{E}[X] = 0$. Montrer que X_i et X_j sont indépendantes ssi $\mathbb{E}[X_i X_j] = 0$.

Exercice 2 Soient X, Y et ε trois variables aléatoires indépendantes avec X et Y gaussiennes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}$. Lesquels des vecteurs suivants sont gaussiens ?

1. (X, ε)
2. (X, Y)
3. $(X, \varepsilon X)$
4. $(X, \varepsilon Y)$
5. $(\varepsilon|X|, \varepsilon|Y|)$
6. $(X, X + Y)$
7. $(X, X + \varepsilon Y)$
8. $(X, \varepsilon X + Y)$

Exercice 3 Soit ξ une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $x > 0$.

1. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(\xi > x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(\xi > x) \leq e^{-x^2/2}$.

Exercice 4 Soit (ξ_n) une suite de variables gaussiennes sur $\mathbb{R}$ qui converge en loi vers une variable aléatoire X. Montrer que X est gaussienne.

Exercice 5 Construire des variables X, Y et Z telles que les vecteurs (X, Y), (Y, Z) et (Z, X) soient gaussiens mais pas le vecteur (X, Y, Z).

2 Problèmes de mesurabilité

Soit $T > 0$. On note $\mathcal{C}([0, T])$ l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu sur $\mathcal{C}([0, T])$ qui rend mesurables les applications coordonnées $x \to x(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Exercice 6 Montrer que $\mathcal{F}$ coïncide avec la tribu borélienne lorsque $\mathcal{C}([0, T])$ est muni de la norme uniforme. Est-ce toujours vrai en remplaçant $\mathcal{C}([0, T])$ par l'espace $L^\infty([0, T])$ des fonctions mesurables bornées de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ (toujours muni de la norme uniforme) ?

Exercice 7 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}([0, T])$ muni de la même tribu que ci-dessus. On suppose que pour tout $k \geq 1$ et tous $t_1, \dots, t_k \in [0, T]$, les vecteurs

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}) \qquad \text{et} \qquad (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_k})$$

ont la même loi. Montrer que X et Y ont la même loi.

3 Processus de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On rappelle que le *processus de Poisson* $(N_t)_{t \geq 0}$ *d'intensité* λ est défini par

$$N_t = \min\{n \in \mathbb{N} | X_0 + X_1 + \cdots + X_n \geq t, \}$$

où $(X_i)_{i \geq 0}$ est une suite de variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ, c'est à dire de loi $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0} \, \mathrm{d}x)$.

On rappelle également que la loi de Poisson de paramètre λ est définie par $\mathcal{P}_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 Montrer que pour tous s et t les variables N_t et $N_{s+t} - N_t$ sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}_{\lambda t}$ et $\mathcal{P}_{\lambda s}$.

Montrer que pour tous $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, les variables $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ pour $0 \leq i \leq k - 1$ sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}_{\lambda(t_{i+1} - t_i)}$.

Exercice 9 Soient $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Montrer que $N^{(1)} + N^{(2)}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.