Processus aléatoires
ENS Paris, 2016-2017

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 1 : Vers le mouvement brownien
Corrigé

Lundi 19 Septembre

1 Variables gaussiennes et vecteurs gaussiens

On rappelle qu'un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est gaussien si pour tout $u = (u_1, \dots, u_d)$, la variable $u \cdot X$ est gaussienne. En écrivant $\mu = \mathbb{E}[X]$ la *moyenne* de X et $K = (cov(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq d}$ sa *matrice de covariance*, on a alors pour tout $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}\left[e^{iu\cdot X}\right] = \exp\left(iu \cdot \mu - \frac{1}{2} {}^t uKu\right).$$

Exercice 1 Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien centré, i.e. $\mathbb{E}[X] = 0$. Montrer que X_i et X_j sont indépendantes ssi $\mathbb{E}[X_i X_j] = 0$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Le sens direct est immédiat. Pour le sens indirect, d'après le rappel ci-dessus, pour tous u et v on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i(uX_i+vX_j)}\right] &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[X_i^2\right] + \mathbb{E}\left[X_j^2\right] + 2\mathbb{E}\left[X_iX_j\right]\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[X_i^2\right] + \mathbb{E}\left[X_j^2\right]\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left[e^{iuX_i}\right]\mathbb{E}\left[e^{ivX_j}\right].
\end{aligned}$$

Comme la fonction caractéristique détermine la loi, le couple (X_i, X_j) a donc la loi de deux gaussiennes indépendantes.

Exercice 2 Soient X, Y et ε trois variables aléatoires indépendantes avec X et Y gaussiennes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}$. Lesquels des vecteurs suivants sont gaussiens ?

1. (X, ε)
2. (X, Y)
3. $(X, \varepsilon X)$
4. $(X, \varepsilon Y)$
5. $(\varepsilon|X|, \varepsilon|Y|)$
6. $(X, X+Y)$
7. $(X, X+\varepsilon Y)$
8. $(X, \varepsilon X + Y)$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Les vecteurs 2, 4, 6 et 7 sont gaussiens. Les vecteurs 2 et 4 le sont car ils ont leurs deux coordonnées indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Les vecteurs 6 et 7 le sont car ils sont les images respectivement des vecteurs 2 et 4 par une application linéaire.

Le vecteur 1 n'est pas gaussien car sa seconde coordonnée ne l'est pas. Le vecteur 3 ne l'est pas car $\mathbb{P}(X + \varepsilon X = 0) = \frac{1}{2}$ donc la somme de ses deux coordonnées n'est pas gaussienne. Pour montrer que le vecteur 8 ne l'est pas, on peut par exemple calculer la fonction caractéristique de la somme de ses coordonnées :

$$\mathbb{E}\left[e^{iu((1+\varepsilon)X+Y)}\right] = \frac{1}{2}\left(1+e^{-u^2}\right)\frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour montrer que le vecteur 5 ne l'est pas, on peut soit calculer aussi sa fonction caractéristique, soit remarquer que $(\varepsilon|X|, \varepsilon|Y|)$ a une densité strictement positive sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ mais une probabilité nulle d'être dans $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$.

Exercice 3 Soit ξ une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $x > 0$.

1. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(\xi > x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(\xi > x) \leq e^{-x^2/2}$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

1. On calcule la dérivée du membre de droite :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x^2}\left(1+x^2\right)e^{-x^2/2}\\ &\leq -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\end{aligned}$$

et, comme $\mathbb{P}(\xi > x) = \int_x^\infty e^{-t^2/2}dt$, on obtient la borne supérieure en intégrant entre x et $+\infty$. De même, la dérivée du membre de gauche est

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{3}{x^4}\right)e^{-x^2/2}\\ &\geq -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\end{aligned}$$

et on obtient la borne inférieure en intégrant entre x et $+\infty$.

2. Si on pose $f(x) = e^{-x^2/2} - \mathbb{P}(\xi > x)$ alors $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - x\right)e^{-x^2/2}$ donc f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, +\infty\right[$. Comme on a aussi $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4 Soit (ξ_n) une suite de variables gaussiennes sur $\mathbb{R}$ qui converge en loi vers une variable aléatoire X. Montrer que X est gaussienne.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On passe par la fonction caractéristique : pour tout n, on note μ_n l'espérance et σ_n^2 la variance de ξ_n. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_{\xi_n}(u) = \exp\left(i\mu_n u - \frac{\sigma_n^2 u^2}{2}\right) \longrightarrow \varphi_X(u)$. En prenant $u = 1$ et en considérant le module, on obtient que $\exp\left(-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)$ converge donc σ_n^2 converge vers σ^2.

On en déduit que $e^{i\mu_n u}$ converge pour tout u donc μ_n converge vers $\mu \in \mathbb{R}$ (c'est le théorème de Lévy pour des variables déterministes), donc $\varphi_{\xi_n}(u) \longrightarrow \exp\left(i\mu u - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)$ donc X est bien gaussienne (éventuellement de variance nulle).

Exercice 5 Construire des variables X, Y et Z telles que les vecteurs (X,Y), (Y,Z) et (Z,X) soient gaussiens mais pas le vecteur (X,Y,Z).

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Prendre par exemple $(X,Y,Z) = (\varepsilon_1|\xi_1|, \varepsilon_2|\xi_2|, \varepsilon_1\varepsilon_2|\xi_3|)$ avec ε_1, ε_2, ξ_1, ξ_2 et ξ_3 indépendantes, les ξ_i gaussiennes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et les ε_i uniformes sur $\{-1,1\}$.

Il est facile de vérifier que X, Y et Z ont pour loi $\mathcal{N}(0,1)$ et que deux d'entre elles sont toujours indépendantes. En particulier, deux d'entre elles forment toujours un vecteur gaussien. Si (X,Y,Z) était un vecteur gaussien, alors X, Y et Z seraient indépendantes, ce qui est faux, par exemple car $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0, Z < 0) = 0$ et $\mathbb{P}(X > 0)\,\mathbb{P}(Y > 0)\,\mathbb{P}(Z < 0) = \frac{1}{8}$.

2 Problèmes de mesurabilité

Soit $T > 0$. On note $\mathcal{C}([0,T])$ l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu sur $\mathcal{C}([0,T])$ qui rend mesurable les applications coordonnées $x \to x(t)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Exercice 6 Montrer que $\mathcal{F}$ coïncide avec la tribu borélienne en munissant $\mathcal{C}([0,T])$ de la norme uniforme. Est-ce toujours vrai en remplaçant $\mathcal{C}([0,T])$ par l'espace $L^\infty([0,T])$ des fonctions mesurables bornées de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ (toujours muni de la norme uniforme) ?

Solution de l'exercice 6 On note $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0,T]))$ la tribu borélienne issue de la norme uniforme. Les applications coordonnées sont continues pour la norme uniforme donc mesurables, donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathcal{C}([0,T])$ par définition de $\mathcal{F}$.

D'autre part, on veut montrer que tous les ouverts de $\mathcal{C}([0,T])$ sont dans $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{C}([0,T])$ est séparable, tout ouvert est une union dénombrable de boules donc il suffit de montrer que les boules sont dans $\mathcal{F}$, donc que pour tout $x_0 \in \mathcal{C}([0,T])$ fixé, l'application $x \to d(x_0, x)$ est mesurable. Or, c'est vrai car

$$d(x, x_0) = \sup_{t \in [0,T]} |x(t) - x_0(t)| = \sup_{t \in [0,T] \cap \mathbb{Q}} |x(t) - x_0(t)|.$$

En remplaçant les fonctions continues par les fonctions bornées on a toujours $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}\left(L^\infty([0,T])\right)$, mais l'autre sens ne marche plus, notamment car les valeurs d'une fonction sur les rationnels ne déterminent plus la fonction. Pour montrer que $\mathcal{F} \neq \mathcal{B}\left(L^\infty([0,T])\right)$, on note $\mathcal{F}_{den}$ l'ensemble des $A \in \mathcal{B}\left(L^\infty([0,T])\right)$ qui ne dépendent que d'un nombre dénombrable de valeurs. Plus précisément, ce sont les A pour lesquels il existe une suite (t_n) telle que, si $x(t_n) = y(t_n)$ pour tout n, alors $x \in A$ ssi $y \in A$. On vérifie que $\mathcal{F}_{den}$ est une tribu, et qu'elle rend mesurable les applications coordonnées. On a donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{den}$. Or, il est facile de vérifier que $\mathcal{F}_{den} \neq \mathcal{B}\left(L^\infty([0,T])\right)$. Par exemple, les ensembles $\{x | \sup_{t\in[0,T]} |x(t)| \leq 1\}$ ou $\{x \text{ continu}\}$ ne sont pas dans $\mathcal{F}_{den}$.

Exercice 7 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}([0,T])$ muni de la même tribu que ci-dessus. On suppose que pour tout $k \geq 1$ et tous $t_1, \dots, t_k \in [0,T]$, les vecteurs

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}) \qquad \text{et} \qquad (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_k})$$

ont la même loi. Montrer que X et Y ont la même loi.

Solution de l'exercice 7 C'est une conséquence de l'exercice précédent et du lemme de classe monotone. D'après l'exercice précédent la tribu $\mathcal{C}([0,T])$ est engendrée par les événements de la forme $\{X_t \in A\}$ avec $t \in [0,T]$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc par les événements de la forme

$$\{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \dots, X_{t_k} \in A_k\} \tag{1}$$

avec $t_1, \dots, t_k \in [0,T]$ et $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. De plus, les événements de la forme (1) sont stables par intersections finies. D'après le lemme de classe monotone, la classe monotone qu'ils engendrent est donc $\mathcal{B}\left(\mathcal{C}([0,T])\right)$. Or, l'ensemble des $\mathbf{A} \in \mathcal{B}\left(\mathcal{C}([0,T])\right)$ tels que $\mathbb{P}\left(X \in \mathbf{A}\right) = \mathbb{P}\left(Y \in \mathbf{A}\right)$ est une classe monotone (c'est une vérification facile), qui contient les $\mathbf{A}$ de la forme (1) d'après l'hypothèse de l'énoncé. On a donc $\mathbb{P}\left(X \in \mathbf{A}\right) = \mathbb{P}\left(Y \in \mathbf{A}\right)$ pour tout $A \in \mathcal{B}\left(\mathcal{C}([0,T])\right)$ donc X et Y ont la même loi.

3 Processus de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On rappelle que le *processus de Poisson* $(N_t)_{t\geq 0}$ *d'intensité* λ est défini par

$$N_t = \min\{n \in \mathbb{N} | X_0 + X_1 + \dots + X_n \geq t, \}$$

où $(X_i)_{i\geq 0}$ est une suite de variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ, c'est à dire de loi $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}\, \mathrm{d}x)$.

On rappelle également que la loi de Poisson de paramètre λ est définie par $🐟_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 Montrer que pour tous s et t les variables N_t et $N_{s+t} - N_t$ sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}_{\lambda t}$ et $\mathcal{P}_{\lambda s}$.

Montrer que pour tous $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, les variables $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ pour $0 \leq i \leq k-1$ sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}_{\lambda(t_{i+1}-t_i)}$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Soient $\ell \geq k \geq 0$. On veut calculer $\mathbb{P}(N_t = k, N_{s+t} = \ell)$. Cet événement équivaut à

$$\{\xi_0 + \cdots + \xi_{k-1} \leq t \leq \xi_0 + \cdots + \xi_k \text{ et } \xi_0 + \cdots + \xi_{\ell-1} \leq s+t \leq \xi_0 + \cdots + \xi_\ell\},$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = k, N_{s+t} = \ell) &= \lambda^{\ell+1} \int_{\mathbb{R}_+^{\ell+1}} e^{-\lambda(x_0+\cdots+x_\ell)} \mathbb{1}_{\xi_0+\cdots+\xi_{k-1} \leq t \leq \xi_0+\cdots+\xi_k} \\
&\quad \mathbb{1}_{\xi_0+\cdots+\xi_{\ell-1} \leq t \leq \xi_0+\cdots+\xi_\ell} \, \mathrm{d}x_0 \ldots \mathrm{d}x_\ell \\
&= \lambda^{\ell+1} \int_{\mathbb{R}_+^{\ell+1}} e^{-\lambda s_\ell} \mathbb{1}_{s_0 \leq \cdots \leq s_{k-1} \leq t \leq s_k \leq \cdots \leq s_{\ell-1} \leq s+t \leq s_\ell} \, \mathrm{d}s_0 \ldots \mathrm{d}s_\ell \\
&= \lambda^\ell \left(\lambda \int_{s+t}^{+\infty} e^{-\lambda s_\ell} \mathrm{d}s_\ell \right) \times \left(\int_{0 \leq s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{k-1} \leq t} \mathrm{d}s_0 \ldots \mathrm{d}s_{k-1} \right) \\
&\times \left(\int_{t \leq s_k \leq s_{k+1} \leq \cdots \leq s_{\ell-1} \leq s+t} \mathrm{d}s_k \ldots \mathrm{d}s_{\ell-1} \right)
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variables $s_i = x_0 + x_1 + \cdots + x_i$. Le premier facteur vaut $e^{-\lambda(s+t)}$, le second $\frac{t^k}{k!}$ (c'est un simple calcul par récurrence sur k, en intégrant d'abord sur les $k-1$ plus petites variables, puis sur s_{k-1}) et le troisième vaut $\frac{s^\ell}{l!}$ (c'est le même calcul que pour le second facteur à changement de variable près). On obtient donc $\mathbb{P}(N_t = k_1, N_{s+t} = k_1 + k_2) = \frac{(\lambda t)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda s)^{k_2}}{k_2!} e^{-\lambda s}$, d'où le résultat.

Avec plus de deux accroissements, le calcul est similaire mais juste un peu plus long à écrire.

Exercice 9 Soient $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Montrer que $N^{(1)} + N^{(2)}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> D'après l'exercice 6 il suffit de calculer la loi de

$$\left(N_{t_1}^{(1)} + N_{t_1}^{(2)}, \ldots, N_{t_k}^{(1)} + N_{t_k}^{(2)} \right)$$

pour tous $k \geq 0$ et $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$. Plus précisément, d'après l'exercice 7 il suffit de montrer que les $N_{t_{i+1}}^{(1)} + N_{t_{i+1}}^{(2)} - N_{t_i}^{(1)} - N_{t_i}^{(2)}$ sont indépendantes, de lois respectives $\mathcal{P}_{(\lambda_1+\lambda_2)(t_{i+1}-t_i)}$. Or, d'après l'exercice 7 et par indépendance de $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ les variables $N_{t_{i+1}}^{(1)} - N_{t_i}^{(1)}$ et $N_{t_{i+1}}^{(2)} - N_{t_i}^{(2)}$ sont toutes indépendantes donc les $N_{t_{i+1}}^{(1)} + N_{t_{i+1}}^{(2)} - N_{t_i}^{(1)} - N_{t_i}^{(2)}$ sont bien indépendantes, et chacune est la somme de deux variables indépendantes de lois $\mathcal{P}_{\lambda_1(t_{i+1}-t_i)}$ et $\mathcal{P}_{\lambda_2(t_{i+1}-t_i)}$. Il suffit donc de vérifier que la somme de deux variables de Poisson X_λ et X_μ de paramètres λ et μ est une variable de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$, ce qu'on peut faire par exemple en calculant sa fonction caractéristique :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{iu(X_\lambda+X_\mu)}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{iuX_\lambda}\right] \mathbb{E}\left[e^{iuX_\mu}\right] \\
&= \left(\sum_{k \geq 0} e^{iuk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \left(\sum_{\ell \geq 0} e^{iu\ell} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \right) \\
&= \exp\left(\lambda e^{iu} - \lambda\right) \exp\left(\mu e^{iu} - \mu\right) \\
&= \exp\left((\lambda + \mu)(e^{iu} - 1)\right).
\end{aligned}$$