Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2016-2017 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 2 : Construction du mouvement brownien
Corrigé

Lundi 26 Septembre

1 Calculs autour de la construction du mouvement brownien

Exercice 1 On rappelle que les fonctions $g_{n,k}$ sont définies sur $[0,1]$ de la manière suivante :

$$g_{0,0}(t) = t \qquad \text{et} \qquad g_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}\left(t - \frac{k-1}{2^n}\right) & \text{si } t \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \\ 2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{k+1}{2^n} - t\right) & \text{si } t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

pour $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq 2^n$ avec k impair. Soient $(\xi_{n,k})_{n,k\geq 0}$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout t de la forme $\frac{i}{2^n}$ on pose

$$B_t = \sum_{n,k} g_{n,k}(t)\xi_{n,k}.$$

Vérifier que pour tous s et t dyadiques on a bien $\mathbb{E}[B_sB_t] = \min(s,t)$.

Indication : On pourra raisonner par récurrence en exprimant $g_{n,k}$ en fonction de $g_{n-1,k}$ ou de $g_{n-1,k-2^{n-1}}$.

Solution de l'exercice 1 Soient s et t dyadiques. On a

$$\mathbb{E}[B_sB_t] = \sum_{n,k}\sum_{m,\ell} g_{m,\ell}(s)g_{n,k}(t)\mathbb{E}[\xi_{m,\ell}\xi_{n,k}] = \sum_{n,k} g_{n,k}(s)g_{n,k}(t)$$

car si $(m,\ell) \neq (n,k)$ alors $\mathbb{E}[\xi_{m,\ell}\xi_{n,k}] = \mathbb{E}[\xi_{m,\ell}]\,\mathbb{E}[\xi_{n,k}] = 0$. Soit p tel que 2^ps et 2^pt sont entiers. En remarquant que $g_{n,k}(s) = 0$ dès que $n > p+1$, on peut se restreindre aux (n,k) avec $n \leq p$. Il suffit donc de montrer pour tous s,t de la forme $\frac{i}{2^p}$:

$$\sum_{n=1}^{p}\sum_{k} g_{n,k}(s)g_{n,k}(t) = \min(s,t) - st,$$

ce qu'on va faire par récurrence sur p. C'est vrai pour $p=0$. Supposons que ce le soit pour $p-1$. Si $s \leq \frac{1}{2}$ et $t \geq \frac{1}{2}$, alors dès que $n \geq 2$ on a $g_{n,k}(s)g_{n,k}(t) = 0$ donc il suffit de calculer

$$g_{1,1}(s)g_{1,1}(t) = s(1-t) = \min(s,t) - st.$$

Si $s,t \leq \frac{1}{2}$ alors

$$\sum_{n=1}^{p}\sum_{k} g_{n,k}(s)g_{n,k}(t) = st + \sum_{n=2}^{p} g_{n,k}(s)g_{n,k}(t),$$

où pour tout (n,k) correspondant à un terme non nul on a $k < 2^{n-1}$. On remarque que les fonctions à l'"étage" n peuvent s'exprimer assez facilement en fonction de celle à l'"étage" $n-1$: si $k \leq 2^{n-1}$ et $x \leq \frac{1}{2}$ alors

$$g_{n,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} g_{n-1,k}(2x)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{p} \sum_{k} g_{n,k}(s) g_{n,k}(t) &= st + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{2}} g_{n,k}(2s) \frac{1}{\sqrt{2}} g_{n,k}(2t) \\
&= st + \frac{1}{2} \left(\min(2s, 2t) - (2s)(2t)\right) \\
&= \min(s,t) - st
\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. Le cas $s, t \geq \frac{1}{2}$ se traite de manière similaire en écrivant

$$g_{n,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} g_{n-1,k-2^{n-1}}(2x-1)$$

pour $k \geq 2^{n-1}$ et $x \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 2 Soit $\left((B^n_t)_{t\in[0,1]}\right)_{n\geq 0}$ une suite de mouvements browniens sur $[0,1]$ indépendants. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on pose

$$\left(B_t = \sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} B^n_1\right) + B^{\lfloor t \rfloor}_{t - \lfloor t \rfloor}.$$

Vérifier que pour tous s et t on a bien

$$\mathbb{E}\left[B_s B_t\right] = \min(s,t).$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> En développant $B_s B_t$ et en intervertissant somme et espérance, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B_s B_t\right] &= \sum_{m=0}^{\lfloor s \rfloor - 1} \sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} \mathbb{E}\left[B^m_1 B^n_1\right] + \sum_{m=0}^{\lfloor s \rfloor - 1} \mathbb{E}\left[B^m_1 B^{\lfloor t \rfloor}_{t-\lfloor t \rfloor}\right] + \sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} \mathbb{E}\left[B^{\lfloor s \rfloor}_{s-\lfloor s \rfloor} B^n_1\right] + \mathbb{E}\left[B^{\lfloor s \rfloor}_{s-\lfloor s \rfloor} B^{\lfloor t \rfloor}_{t-\lfloor t \rfloor}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\lfloor \min(s,t) \rfloor - 1} \mathbb{E}\left[(B^n_1)^2\right] + \mathbb{1}_{\lfloor t \rfloor \leq \lfloor s \rfloor - 1} \mathbb{E}\left[B^{\lfloor t \rfloor}_1 B^{\lfloor t \rfloor}_{t-\lfloor t \rfloor}\right] + \mathbb{1}_{\lfloor s \rfloor \leq \lfloor t \rfloor - 1} \mathbb{E}\left[B^{\lfloor s \rfloor}_1 B^{\lfloor s \rfloor}_{s-\lfloor s \rfloor}\right] \\
&+ \mathbb{1}_{\lfloor s \rfloor = \lfloor t \rfloor} \mathbb{E}\left[B^{\lfloor s \rfloor}_{s-\lfloor s \rfloor} B^{\lfloor t \rfloor}_{t-\lfloor t \rfloor}\right],
\end{aligned}$$

en supprimant les termes qui sont nuls par indépendance de B^m et B^n pour $m \neq n$. En utilisant les covariances des B^n on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B_s B_t\right] &= \lfloor \min(s,t) \rfloor + \mathbb{1}_{\lfloor t \rfloor < \lfloor s \rfloor}(t - \lfloor t \rfloor) + \mathbb{1}_{\lfloor s \rfloor < \lfloor t \rfloor}(s - \lfloor s \rfloor) + \mathbb{1}_{\lfloor s \rfloor = \lfloor t \rfloor} \min(s - \lfloor s \rfloor, t - \lfloor t \rfloor) \\
&= \min(s,t).
\end{aligned}$$

2 Comment identifier la loi d'un processus ?

Soit $T > 0$. On munit l'espace $\mathcal{C}([0,T])$ des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ de la norme infinie, et de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0,T]))$ associée à cette norme. On rappelle (TD de la semaine dernière, exercice 6) que la tribu borélienne est aussi la plus petite tribu sur $\mathcal{C}([0,T])$ qui rend mesurables les projections $x \to x_t$ pour $t \in [0,T]$.

Exercice 3 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}([0,T])$. On suppose que pour tout $k \geq 1$ et tous $t_1, \ldots, t_k \in [0,T]$, les vecteurs

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) \qquad \text{et} \qquad (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_k})$$

ont la même loi. Montrer que X et Y ont la même loi.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> C'est une conséquence du rappel ci-dessus et du lemme de classe monotone. D'après le rappel la tribu $\mathcal{C}([0,T])$ est engendrée par les événements de la forme $\{X_t \in A\}$ avec $t \in [0,T]$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc par les événements de la forme

$$\{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \ldots, X_{t_k} \in A_k\} \tag{1}$$

avec $t_1, \ldots, t_k \in [0,T]$ et $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. De plus, les événements de la forme (1) sont stables par intersections finies. D'après le lemme de classe monotone, la classe monotone qu'ils engendrent est donc $\mathcal{B}\left(\mathcal{C}([0,T])\right)$. Or, l'ensemble des $\mathbf{A} \in \mathcal{B}\left(\mathcal{C}([0,T])\right)$ tels que $\mathbb{P}\left(X \in \mathbf{A}\right) = \mathbb{P}\left(Y \in \mathbf{A}\right)$ est une classe monotone (c'est une vérification facile), qui contient les $\mathbf{A}$ de la forme (1) d'après l'hypothèse de l'énoncé. On a donc $\mathbb{P}\left(X \in \mathbf{A}\right) = \mathbb{P}\left(Y \in \mathbf{A}\right)$ pour tout $A \in \mathcal{B}\left(\mathcal{C}([0,T])\right)$ donc X et Y ont la même loi.

Exercice 4 En déduire que si X vérifie les trois conditions suivantes :
(i) pour tous $t_1, \ldots, t_k \geq 0$ le vecteur $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ est un vecteur gaussien,
(ii) pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{E}\left[X_t\right] = 0$,
(iii) pour tous $s, t \geq 0$ on a $\mathbb{E}\left[X_s X_t\right] = \min\left(s,t\right)$,
alors X a la loi d'un mouvement brownien.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Soit B un mouvement brownien et $t_1, \ldots, t_k \in [0,T]$: d'après l'exercice précédent, il suffit de vérifier que $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ a la même loi que $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})$. Or, les deux sont des vecteurs gaussiens d'après l'hypothèse (i) et on sait que la loi d'un vecteur gaussien est entièrement déterminée par son espérance et par sa matrice de covariance. Or, d'après l'hypothèse (ii) on a $\mathbb{E}\left[X_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[B_{t_i}\right] = 0$ pour tout i, et d'après l'hypothèse (iii) on a $\mathbb{E}\left[X_{t_i} X_{t_j}\right] = \mathbb{E}\left[B_{t_i} B_{t_j}\right] = \min\left(t_i, t_j\right)$ pour tous i et j, donc on peut conclure.

Remarque Dans la suite, on pourra admettre que ce résultat reste vrai en remplaçant $\mathcal{C}\left([0,T]\right)$ par l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et de la tribu borélienne associée (ce n'est pas un résultat difficile, il suffit d'adapter l'exercice 6 du TD1 à ce cas).

3 Mouvements browniens

Exercice 5 Soit B un mouvement brownien et $a > 0$. Montrer que les processus suivants sont des mouvements browniens :

- $X = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}\right)_{t \geq 0}$
- $Y = \left(t B_{1/t}\right)_{t \geq 0}$
- $Z = \left(B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s}\, \mathrm{d}s\right)_{t \geq 0}$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Il est facile de vérifier que les deux premiers processus sont gaussiens et centrés. Il suffit donc de vérifier les covariances :

- $\mathbb{E}\left[X_s X_t\right] = \frac{1}{a} \min(as, at) = \min(s,t)$ donc X est bien un mouvement brownien
- $\mathbb{E}\left[Y_s Y_t\right] = st \min\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) = \min(s,t)$ donc Y est bien un mouvement brownien

Pour le troisième, on commence par vérifier que l'intégrale converge. On a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{|B_s|}{s} \mathrm{d}s\right] = \int_0^t \frac{1}{s} \mathbb{E}\left[|B_s|\right] \mathrm{d}s = \int_0^t \frac{\mathbb{E}\left[|B_1|\right]}{\sqrt{s}} \mathrm{d}s < +\infty$$

donc $\int_0^t \frac{|B_s|}{s} \mathrm{d}s < +\infty$ p.s. donc Z est bien défini p.s. De plus, soient $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}^+$. En écrivant l'intégrale $\int_0^t \frac{B_s}{s} \, \mathrm{d}s$ comme limite de sommes de Riemann, on voit que $Z_{t_1} + \cdots + Z_{t_k}$ est une limite p.s. de combinaisons linéaires de valeur de B, donc une limite p.s. de variables gaussiennes, donc une limite en loi de variables gaussiennes. Or, une limite en loi de variables gaussiennes est gaussienne (cf. TD1, exercice 4), donc $Z_{t_1} + \cdots + Z_{t_k}$ est gaussienne. Le processus Z est donc gaussien et il est facile de vérifier qu'il est centré. Il n'y a donc plus qu'à calculer les covariances. En supposant $s \leq t$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_s Z_t\right] &= \min(s,t) - \int_0^s \frac{\min(t,u)}{u} \, \mathrm{d}u - \int_0^t \frac{\min(s,u)}{u} \, \mathrm{d}u + \int_0^s \int_0^t \frac{\min(u,r)}{ur} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}r \\
&= s - s - \int_0^s \frac{\min(s,u)}{u} \, \mathrm{d}u - \int_s^t \frac{\min(s,u)}{u} \, \mathrm{d}u + \int_0^s \int_0^s \frac{\min(u,r)}{ur} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}r + \int_0^s \int_s^t \frac{\min(u,r)}{ur} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}r \\
&= -s - s \ln \frac{t}{s} + 2 \int_{0 \leq u \leq r \leq s} \frac{1}{r} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}r + \int_0^s \int_s^t \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}r \\
&= -s - s \ln \frac{t}{s} + 2 \int_0^s \frac{r}{r} dr + s \ln \frac{t}{s} \\
&= -s + 2s = s.
\end{aligned}$$

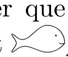
4 Processus de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On rappelle que le *processus de Poisson* $(N_t)_{t \geq 0}$ *d'intensité* λ est défini par

$$N_t = \min\{n \in \mathbb{N} | X_0 + X_1 + \cdots + X_n \geq t\},$$

où $(X_i)_{i \geq 0}$ est une suite de variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ, c'est à dire de loi $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0} \, \mathrm{d}x$).

On rappelle également que la loi de Poisson de paramètre λ est définie par $_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 Montrer que pour tous s et t les variables N_t et $N_{s+t} - N_t$ sont indépendantes de lois respectives $_{\lambda t}$ et $_{\lambda s}$.

Montrer que pour tous $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, les variables $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ pour $0 \leq i \leq k-1$ sont indépendantes de lois respectives $_{\lambda(t_{i+1} - t_i)}$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Soient $\ell \geq k \geq 0$. On veut calculer $\mathbb{P}\left(N_t = k, N_{s+t} = \ell\right)$. Cet événement équivaut à

$$\{\xi_0 + \cdots + \xi_{k-1} \leq t \leq \xi_0 + \cdots + \xi_k \text{ et } \xi_0 + \cdots + \xi_{\ell-1} \leq s + t \leq \xi_0 + \cdots + \xi_\ell\},$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_t = k, N_{s+t} = \ell\right) &= \lambda^{\ell+1} \int_{\mathbb{R}_+^{\ell+1}} e^{-\lambda(x_0 + \cdots + x_\ell)} \mathbb{1}_{\xi_0 + \cdots + \xi_{k-1} \leq t \leq \xi_0 + \cdots + \xi_k} \\
&\quad \mathbb{1}_{\xi_0 + \cdots + \xi_{\ell-1} \leq t \leq \xi_0 + \cdots + \xi_\ell} \, \mathrm{d}x_0 \ldots \mathrm{d}x_\ell \\
&= \lambda^{\ell+1} \int_{\mathbb{R}_+^{\ell+1}} e^{-\lambda s_\ell} \mathbb{1}_{s_0 \leq \cdots \leq s_{k-1} \leq t \leq s_k \leq \cdots \leq s_{\ell-1} \leq s+t \leq s_\ell} \, \mathrm{d}s_0 \ldots \mathrm{d}s_\ell \\
&= \lambda^\ell \left(\lambda \int_{s+t}^{+\infty} e^{-\lambda s_\ell} \mathrm{d}s_\ell \right) \times \left(\int_{0 \leq s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{k-1} \leq t} \mathrm{d}s_0 \ldots \mathrm{d}s_{k-1} \right) \\
&\times \left(\int_{t \leq s_k \leq s_{k+1} \leq \cdots \leq s_{\ell-1} \leq s+t} \mathrm{d}s_k \ldots \mathrm{d}s_{\ell-1} \right)
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variables $s_i = x_0 + x_1 + \cdots + x_i$. Le premier facteur vaut $e^{-\lambda(s+t)}$, le second $\frac{t^k}{k!}$ (c'est un simple calcul par récurrence sur k, en intégrant d'abord sur les $k-1$ plus petites variables, puis sur s_{k-1}) et le troisième vaut $\frac{s^{\ell-k}}{(\ell-k)!}$ (c'est le même calcul que pour le second facteur à changement de variable près). On obtient donc $\mathbb{P}\left(N_t = k_1, N_{s+t} = k_1 + k_2\right) = \frac{(\lambda t)^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda s)^{k_2}}{k_2!}e^{-\lambda s}$, d'où le résultat.

Avec plus de deux accroissements, le calcul est similaire mais juste un peu plus long à écrire.

Exercice 7 Soient $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Montrer que $N^{(1)} + N^{(2)}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Solution de l'exercice 7 D'après l'exercice 6 il suffit de calculer la loi de

$$\left(N^{(1)}_{t_1} + N^{(2)}_{t_1}, \ldots, N^{(1)}_{t_k} + N^{(2)}_{t_k}\right)$$

pour tous $k \geq 0$ et $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$. Plus précisément, d'après l'exercice 7 il suffit de montrer que les $N^{(1)}_{t_{i+1}} + N^{(2)}_{t_{i+1}} - N^{(1)}_{t_i} - N^{(2)}_{t_i}$ sont indépendantes, de lois respectives $\mathcal{P}_{(\lambda_1+\lambda_2)(t_{i+1}-t_i)}$. Or, d'après l'exercice 7 et par indépendance de $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ les variables $N^{(1)}_{t_{i+1}} - N^{(1)}_{t_i}$ et $N^{(2)}_{t_{i+1}} - N^{(2)}_{t_i}$ sont toutes indépendantes donc les $N^{(1)}_{t_{i+1}} + N^{(2)}_{t_{i+1}} - N^{(1)}_{t_i} - N^{(2)}_{t_i}$ sont bien indépendantes, et chacune est la somme de deux variables indépendantes de lois $\mathcal{P}_{\lambda_1(t_{i+1}-t_i)}$ et $\mathcal{P}_{\lambda_2(t_{i+1}-t_i)}$. Il suffit donc de vérifier que la somme de deux variables de Poisson X_λ et X_μ de paramètres λ et μ est une variable de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$, ce qu'on peut faire par exemple en calculant sa fonction caractéristique :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{iu(X_\lambda + X_\mu)}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{iuX_\lambda}\right]\mathbb{E}\left[e^{iuX_\mu}\right] \\
&= \left(\sum_{k\geq 0} e^{iuk}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell\geq 0} e^{iu\ell}e^{-\lambda}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}\right) \\
&= \exp\left(\lambda e^{iu} - \lambda\right)\exp\left(\mu e^{iu} - \mu\right) \\
&= \exp\left((\lambda + \mu)(e^{iu} - 1)\right).
\end{aligned}$$