Processus aléatoires
ENS Paris, 2016-2017

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 3 : Mouvement brownien, théorème de Donsker

Lundi 3 Octobre

L'exercice 3 est à chercher pour la semaine prochaine.

1 Processus de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On rappelle que le *processus de Poisson* $(N_t)_{t\geq 0}$ *d'intensité* λ est défini par

$$N_t = \min\{n \in \mathbb{N} | X_0 + X_1 + \cdots + X_n \geq t\},$$

où $(X_i)_{i\geq 0}$ est une suite de variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ, c'est à dire de loi $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}\,\mathrm{d}x)$.

On rappelle également que la loi de Poisson de paramètre λ est définie par $\text{🐟}_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 Montrer que pour tous s et t les variables N_t et $N_{s+t} - N_t$ sont indépendantes de lois respectives $\text{🐟}_{\lambda t}$ et $\text{🐟}_{\lambda s}$.

Montrer que pour tous $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, les variables $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ pour $0 \leq i \leq k-1$ sont indépendantes de lois respectives $\text{🐟}_{\lambda(t_{i+1}-t_i)}$.

2 Applications du théorème de Donsker

Exercice 2

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, i.e. $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ où les Y_i sont i.i.d. et $\mathbb{P}(Y_i = -1) = \mathbb{P}(Y_i = +1) = \frac{1}{2}$. On note aussi $I_n = \min\{X_k | 0 \leq k \leq n\}$. Justifier que $(X_n - I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même loi que $\left(\left|X_n + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien. Pour tout t, on note $J_t = \inf\{B_s | 0 \leq s \leq t\}$. Déduire de la question précédente que $(B_t - J_t)_{0\leq t\leq 1}$ a la même loi que $(|B_t|)_{0\leq t\leq 1}$.
3. En déduire que l'ensemble des $t \in [0,1]$ tels que $B_t = 0$ soit est réduit à $\{0\}$, soit est indénombrable.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, et $M_n = \max\{X_k | 0 \leq k \leq n\}$.

1. Montrer que pour tous $a, n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(M_n \geq a, X_n < a) = \mathbb{P}(M_n \geq a, X_n > a)$.
2. En déduire une expression aussi simple que possible de la loi de M_n en fonction de celle de X_n.
3. Soit B un mouvement brownien et soit $S_t = \sup\{B_s | 0 \leq s \leq t\}$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que S_1 a la même loi que $|B_1|$.
4. En déduire que S_t a la même loi que $|B_t|$ pour tout $t \geq 0$.
5. Est-il vrai que $(S_t)_{t\geq 0}$ a la même loi que $(|B_t|)_{t\geq 0}$?

Indication : L'outil à utiliser pour la première question se nomme "principe de réflexion". Il est possible de traiter les questions suivantes en admettant la première.

3 Autres petits exercices

Exercice 4 Soit $\varepsilon > 0$ et B un mouvement brownien. Montrer que

$$\frac{B_t}{t^{1/2+\varepsilon}} \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} 0.$$

Indication : Utiliser un exercice de la semaine dernière.

Exercice 5 Montrer que $\int_0^{+\infty} |B_t| \,\mathrm{d}t = +\infty$ presque sûrement.