Processus aléatoires
ENS Paris, 2016-2017

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 3 : Mouvement brownien, théorème de Donsker
Corrigé

Lundi 3 Octobre

1 Processus de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On rappelle que le *processus de Poisson* $(N_t)_{t \geq 0}$ *d'intensité* λ est défini par

$$N_t = \min\{n \in \mathbb{N} | X_0 + X_1 + \cdots + X_n \geq t\},$$

où $(X_i)_{i \geq 0}$ est une suite de variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ, c'est à dire de loi $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0} \, \mathrm{d}x$).

On rappelle également que la loi de Poisson de paramètre λ est définie par $\text{🐟}_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 Montrer que pour tous s et t les variables N_t et $N_{s+t} - N_t$ sont indépendantes de lois respectives $\text{🐟}_{\lambda t}$ et $\text{🐟}_{\lambda s}$.

Montrer que pour tous $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, les variables $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ pour $0 \leq i \leq k-1$ sont indépendantes de lois respectives $\text{🐟}_{\lambda(t_{i+1}-t_i)}$.

Solution de l'exercice 1 Soient $\ell \geq k \geq 0$. On veut calculer $\mathbb{P}(N_t = k, N_{s+t} = \ell)$. Cet événement équivaut à

$$\{\xi_0 + \cdots + \xi_{k-1} \leq t \leq \xi_0 + \cdots + \xi_k \text{ et } \xi_0 + \cdots + \xi_{\ell-1} \leq s+t \leq \xi_0 + \cdots + \xi_\ell\},$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = k, N_{s+t} = \ell) &= \lambda^{\ell+1} \int_{\mathbb{R}_+^{\ell+1}} e^{-\lambda(x_0+\cdots+x_\ell)} \mathbb{1}_{\xi_0+\cdots+\xi_{k-1} \leq t \leq \xi_0+\cdots+\xi_k} \\
&\quad \mathbb{1}_{\xi_0+\cdots+\xi_{\ell-1} \leq t \leq \xi_0+\cdots+\xi_\ell} \, \mathrm{d}x_0 \ldots \mathrm{d}x_\ell \\
&= \lambda^{\ell+1} \int_{\mathbb{R}_+^{\ell+1}} e^{-\lambda s_\ell} \mathbb{1}_{s_0 \leq \cdots \leq s_{k-1} \leq t \leq s_k \leq \cdots \leq s_{\ell-1} \leq s+t \leq s_\ell} \, \mathrm{d}s_0 \ldots \mathrm{d}s_\ell \\
&= \lambda^\ell \left(\lambda \int_{s+t}^{+\infty} e^{-\lambda s_\ell} \mathrm{d}s_\ell \right) \times \left(\int_{0 \leq s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{k-1} \leq t} \mathrm{d}s_0 \ldots \mathrm{d}s_{k-1} \right) \\
&\quad \times \left(\int_{t \leq s_k \leq s_{k+1} \leq \cdots \leq s_{\ell-1} \leq s+t} \mathrm{d}s_k \ldots \mathrm{d}s_{\ell-1} \right)
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variables $s_i = x_0 + x_1 + \cdots + x_i$. Le premier facteur vaut $e^{-\lambda(s+t)}$, le second $\frac{t^k}{k!}$ (c'est un simple calcul par récurrence sur k, en intégrant d'abord sur les $k-1$ plus petites variables, puis sur s_{k-1}) et le troisième vaut $\frac{s^{\ell-k}}{(\ell-k)!}$ (c'est le même calcul que pour le second facteur à changement de variable près). On obtient donc $\mathbb{P}(N_t = k_1, N_{s+t} = k_1 + k_2) = \frac{(\lambda t)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda s)^{k_2}}{k_2!} e^{-\lambda s}$, d'où le résultat.

Avec plus de deux accroissements, le calcul est similaire mais juste un peu plus long à écrire.

2 Utilisations du théorème de Donsker

Exercice 2

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, i.e. $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ où les Y_i sont i.i.d. et $\mathbb{P}(Y_i = -1) = \mathbb{P}(Y_i = +1) = \frac{1}{2}$. On note aussi $I_n = \min\{X_k | 0 \leq k \leq n\}$. Justifier que $(X_n - I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même loi que $\left(\left|X_n + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien. Pour tout t, on note $J_t = \inf\{B_s | 0 \leq s \leq t\}$. Déduire de la question précédente que $(B_t - J_t)_{0\leq t\leq 1}$ a la même loi que $(|B_t|)_{0\leq t\leq 1}$.
3. En déduire que l'ensemble des $t \in [0, 1]$ tels que $B_t = 0$ soit est réduit à $\{0\}$, soit est indénombrable.

Solution de l'exercice 2

1. Tant que $X_n - I_n > 0$, on a $X_n > I_n$ donc $I_{n+1} = I_n$ et $X_n - I_n$ évolue comme une marche aléatoire, c'est-à-dire que $X_{n+1} - I_{n+1}$ vaut $X_n - I_n + 1$ avec proba $\frac{1}{2}$ et $X_n - I_n - 1$ avec proba $\frac{1}{2}$. Si $X_n - I_n = 0$ alors $X_n = I_n$ donc avec proba $\frac{1}{2}$ on a $X_{n+1} = X_n - 1$, d'où $I_{n+1} = I_n - 1$ et $X_{n+1} - I_{n+1} = X_n - I_n$, et avec proba $\frac{1}{2}$ on a $X_{n+1} = X_n + 1$ donc $I_{n+1} = I_n$ et $X_{n+1} - I_{n+1} = X_n - I_n + 1$. Le processus $(X_n - I_n)$ évolue donc comme une marche aléatoire, sauf en 0 où il a une chance sur deux de rester en 0 et une chance sur deux de passer à 1.

   De même, si $\left|X_n + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} \neq 0$, alors $X_n \neq -1, 0$ et $\left|X_n + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}$ va augmenter de 1 avec proba $\frac{1}{2}$, et diminuer de 1 avec proba $\frac{1}{2}$. Si $\left|X_n + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} = 0$, alors X_n vaut 0 ou -1. Si par exemple $X_n = 0$, alors avec proba $\frac{1}{2}$ on a $X_{n+1} = -1$, auquel cas $\left|X_{n+1} + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} = 0$, et avec proba $\frac{1}{2}$ on a $X_{n+1} = 1$, auquel cas $\left|X_{n+1} + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} = 1$. Le cas $X_n = -1$ se traite similairement. Les deux processus ont donc la même loi.

   La démonstration ci-dessus n'est pas totalement rigoureuse. Une manière de l'écrire rigoureusement est de décrire $\mathbb{P}(X_1 - I_1 = i_1, \dots, X_n - I_n = i_n)$ pour tous entiers $i_1, \dots, i_n$ et de même pour le second processus, ce qui est un peu lourd à rédiger. Une seconde manière est de dire que d'après la discussion ci-dessus, $(X_n - I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\left|X_n + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux chaînes de Markov avec les mêmes probabilités de transitions et ont donc la même loi (cf. plus tard dans le cours).
2. D'après la première question, pour tout n, les processus $\left(\frac{X_{\lfloor nt\rfloor} - I_{\lfloor nt\rfloor}}{\sqrt{n}}\right)_{0\leq t\leq 1}$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left|X_{\lfloor nt\rfloor} + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right)\right)_{0\leq t\leq 1}$ ont la même loi. Quand $n \to +\infty$, d'après le théorème de Donsker et la continuité (pour la norme uniforme) de l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1]) \\ x & \longrightarrow & \left(x_t - \inf\limits_{[0,s]} x_s\right)_{0\leq t\leq 1} \end{array},$$

   le premier processus converge vers $(B_t - J_t)_{0\leq t\leq 1}$. Il suffit donc de montrer que le second converge vers $(|B_t|)_{0\leq t\leq 1}$. Or, d'après le théorème de Donsker et la continuité de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1]) \\ x & \longrightarrow & (|x_t|)_{0\leq t\leq 1} \end{array},$$

   on a $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|X_{\lfloor nt\rfloor}\right|\right)_{0\leq t\leq 1} \to (|B_t|)_{0\leq t\leq 1}$. On a de plus

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left|X_{\lfloor nt\rfloor} + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right)\right)_{0\leq t\leq 1} - \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|X_{\lfloor nt\rfloor}\right|\right)_{0\leq t\leq 1} \right\|_\infty & \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ & \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

   Le processus qui nous intéresse est donc la somme d'un processus qui converge en loi vers $(|B_t|)_{0\leq t\leq 1}$ et d'un processus qui converge en loi vers 0. On peut donc conclure par le lemme de Slutsky.

3. D'après la question précédente, les sous-ensembles aléatoires $\{t|B_t = 0\}$ et $\{t|B_t = I_t\}$ de $[0,1]$ ont la même loi, donc il suffit de montrer que le second est soit réduit à $\{0\}$ soit indénombrable. Si $B_t > 0$ pour tout $t \in]0,1]$, alors $I_t = 0$ pour tout t et l'ensemble est réduit à $\{0\}$. Sinon, il existe $t_0 \in]0,1]$ tel que $B_{t_0} < 0$. Pour tout $x \in]B_{t_0}, 0[$, on note $\tau_x = \inf\{t \in [0,t_0] | B_t = x\}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tous ces τ_x sont bien définis. Ils sont de plus tous distincts et forment un ensemble indénombrable. De plus, on a $B_{\tau_x} = I_{\tau_x}$ pour tout x (toujours grâce au TVI), ce qui permet de conclure.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, et $M_n = \max\{X_k | 0 \le k \le n\}$.

1. Montrer que pour tous $a, n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(M_n \ge a, X_n < a) = \mathbb{P}(M_n \ge a, X_n > a)$.
2. En déduire une expression aussi simple que possible de la loi de M_n en fonction de celle de X_n.
3. Soit B un mouvement brownien et soit $S_t = \sup\{B_s | 0 \le s \le t\}$ pour tout $t \ge 0$. Montrer que S_1 a la même loi que $|B_1|$.
4. En déduire que S_t a la même loi que $|B_t|$ pour tout $t \ge 0$.
5. Est-il vrai que $(S_t)_{t\ge 0}$ a la même loi que $(|B_t|)_{t\ge 0}$?

<u>*Indication :*</u> L'outil à utiliser pour la première question se nomme "principe de réflexion". Il est possible de traiter les questions suivantes en admettant la première.
<u>*Solution de l'exercice 3*</u> A chercher pour la semaine prochaine !

3 Autres petits exercices

Exercice 4 Soit $\varepsilon > 0$ et B un mouvement brownien. Montrer que

$$\frac{B_t}{t^{1/2+\varepsilon}} \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} 0.$$

<u>*Indication :*</u> Utiliser un exercice de la semaine dernière.
<u>*Solution de l'exercice 4*</u> D'après l'exercice 5 de la semaine dernière, $\left(tB_{1/t}\right)_{t\ge 0}$ a la même loi que B donc il suffit de montrer

$$\frac{tB_{1/t}}{t^{1/2+\varepsilon}} \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} 0,$$

soit

$$\frac{B_u}{u^{1/2-\varepsilon}} \xrightarrow[u\to 0]{p.s.} 0$$

en faisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$. Cela provient immédiatement du fait (vu en cours) que B est $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$-Hölderien au voisinage de 0.

Remarque En utilisant seulement la continuité en 0, on obtient déjà $\frac{B_t}{t} \to 0$ p.s. quand $t \to +\infty$.
Exercice 5 Montrer que $\int_0^{+\infty} |B_t| \,\mathrm{d}t = +\infty$ presque sûrement.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Il y a plusieurs manières de résoudre cet exercice. Une possibilité est de montrer que comme $\mathbb{P}(|B_t| \le 1) \longrightarrow 0$ quand $t \to +\infty$, on a $|B_t| \le 1$ la plupart du temps. Plus précisément, on a $|B_t| \ge \mathbb{1}_{|B_t|\ge 1}$ pour tout t, donc il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{|B_t|\ge 1} \,\mathrm{d}t = +\infty$ p.s. Il suffit donc de montrer que pour tous c et $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{|B_t|\ge 1} \,\mathrm{d}t \le c\right) \le \varepsilon$. Soient donc $c, \varepsilon > 0$. Il existe a tel que pour $t \ge a$, on a $\mathbb{P}(|B_t| \le 1) \le \varepsilon$ (par exemple en écrivant la densité de B_t), donc pour tout $b > 0$, en utilisant Fubini :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_a^{a+b} \mathbb{1}_{|B_t|\le 1} \mathrm{d}t\right] &= \int_a^{a+b} \mathbb{P}(|B_t| \le 1) \,\mathrm{d}t \\ &\le b\varepsilon\end{aligned}$$

donc, pour tout $b > c$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{|B_t|\geq 1}\,\mathrm{d}t \leq c\right) &\leq \mathbb{P}\left(\int_a^{a+b} \mathbb{1}_{|B_t|\geq 1}\,\mathrm{d}t \leq c\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\int_a^{a+b} \mathbb{1}_{|B_t|\leq 1}\,\mathrm{d}t \geq b-c\right) \\
&\leq \frac{b\varepsilon}{b-c} \\
&\xrightarrow[b\to+\infty]{} \varepsilon,
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Markov à l'avant-dernière ligne.