Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2016-2017 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 4 : Marches aléatoires et mouvement brownien

Lundi 10 Octobre

1 Exercice à préparer pour la séance

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, et $M_n = \max\{X_k | 0 \leq k \leq n\}$.

1. Montrer que pour tous $a, n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(M_n \geq a, X_n < a) = \mathbb{P}(M_n \geq a, X_n > a)$.
2. En déduire une expression aussi simple que possible de la loi de M_n en fonction de celle de X_n.
3. Soit B un mouvement brownien et soit $S_t = \sup\{B_s | 0 \leq s \leq t\}$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que S_1 a la même loi que $|B_1|$.
4. En déduire que S_t a la même loi que $|B_t|$ pour tout $t \geq 0$.
5. Est-il vrai que $(S_t)_{t\geq 0}$ a la même loi que $(|B_t|)_{t\geq 0}$?

<u>*Indication :*</u> L'outil à utiliser pour la première question se nomme "principe de réflexion".

2 Loi du logarithme itéré pour le mouvement brownien

Exercice 2 Soit B un mouvement brownien. Le but de cet exercice est de montrer que presque sûrement :

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1,$$

avec $h(t) = \sqrt{2t \ln \ln t}$. On rappelle que $\mathbb{P}(B_1 > x) \sim \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}\, x}$ quand $x \to +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$ et S comme dans l'exercice précédent. En utilisant l'exercice précédent, estimer $\mathbb{P}\left(S_{(1+\varepsilon)^n} > (1+\varepsilon) h\left((1+\varepsilon)^n\right)\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire $\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} \leq 1$ p.s.
3. Soit $r > 1$. Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} h(r^n)$.
4. En déduire $\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1$ p.s.

3 Marches aléatoires et fonctions harmoniques

Exercice 3 Soit S une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et $a, b \geq 0$. On note

$$T_{a,b} = \inf\{n \in \mathbb{N} | S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

1. Montrer qu'il existe $A, c > 0$ tel que $\mathbb{P}(T_{a,b} \geq n) \leq Ae^{-cn}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\mathbb{E}[T_{a,b}] < +\infty$.
2. En s'inspirant de la méthode vue en cours pour calculer la loi de $S_{T_{a,b}}$, calculer $\mathbb{E}[T_{a,b}]$.
3. En déduire que si $T_b = \inf\{n \in \mathbb{N} | S_n = b\}$, alors $\mathbb{E}[T_b] = +\infty$ pour tout $b \neq 0$.

Exercice 4 (Marche aléatoire biaisée)

On se donne $p > \frac{1}{2}$. Soient $(X_i)_{i \geq 0}$ i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X_i = +1) = p$. Pour tout $n \geq 0$, on écrit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soient $a, b \geq 0$. On note $T_{a,b} = \inf\{n \in \mathbb{N} | S_n = -a \text{ ou } S_n = b.\}$.

1. Déterminer la loi de $S_{T_{a,b}}$.
2. En déduire la loi de $\min\{S_n | n \geq 0\}$.
3. Reprendre l'exercice 3 pour la marche aléatoire biaisée.