Processus aléatoires
ENS Paris, 2016-2017

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 5 : Espérance conditionnelle

Lundi 17 Octobre

L'exercice 8 est à préparer pour la semaine prochaine.

Exercice 1 (Petits contre-exemples) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, et $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ deux sous-tribus de $\mathscr{F}$ telles que $\sigma(\mathscr{G}, \mathscr{H}) = \mathscr{F}$. Trouver des contre-exemples aux affirmations suivantes :

1. Si $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$, alors X et Y sont indépendantes.
2. Si $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = 0$ et $\mathbb{E}[X|\mathscr{H}] = 0$, alors $X = 0$.
3. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]$ le sont aussi.

Exercice 2 Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs respectivement dans E et F. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. On suppose que X est indépendante de $\mathscr{G}$ et que Y est $\mathscr{G}$-mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $g : E \times F \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}[g(X,Y)|\mathscr{G}] = \int_E g(x,Y) P_X(dx)$$

où P_X désigne la loi de X. Le terme de droite est la composée de la variable aléatoire Y par l'application $\phi : y \to \int g(x,y) P_X(dx)$ (où ϕ est mesurable par le théorème de Fubini).

Exercice 3 (Espérance conditionnelle et positivité) Soit X une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Montrer que $\{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] > 0]\}$ est le plus petit ensemble $\mathscr{G}$-mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Exercice 4 (Espérance conditionnelle et convergence en proba) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-tribus de $\mathscr{F}$. On suppose que $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 5 Soit X une variable intégrable sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Soit Y une v.a. $\mathscr{G}$-mesurable, on veut montrer que $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = Y$. Montrer que si Π est un ensemble de parties de Ω qui contient Ω, stable par intersections finies et dont la tribu engendrée est $\mathscr{G}$, il suffit de montrer

$$\forall \pi \in \Pi \ , \ \mathbb{E}[X \mathbb{1}_\pi] = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_\pi].$$

Exercice 6 (Indépendance conditionnelle) On dit que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans un espace $(E, \mathscr{E})$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathscr{G}$ si pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurables,

$$\mathbb{E}[f(X)\, g(Y)|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathscr{G}]\, \mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathscr{G} = \mathscr{F}$?
2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z positive $\mathscr{G}$-mesurable, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurables,

   $$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]].$$

   et aussi à : pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable positive,

   $$\mathbb{E}[g(Y)|\sigma(\mathscr{G}, X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}].$$

Exercice 7 (Calculs) On se donne deux réels $a, b > 0$, et (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) \ = \ b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y) dy \, .$$

Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, puis $\mathbb{E}[\frac{Y}{X+1}]$. Calculer ensuite $\mathbb{P}\,(X = n|Y)$ et enfin $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 8 On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s.
2. Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z et tout $a \geq 0$,

   $$\mathbb{E}[Z|Z \wedge a] \wedge a = Z \wedge a.$$

3. Montrer que le couple $(X \wedge a, Y \wedge a)$ vérifie les mêmes hypothèses que le couple (X, Y) et en déduire que $X = Y$ p.s.