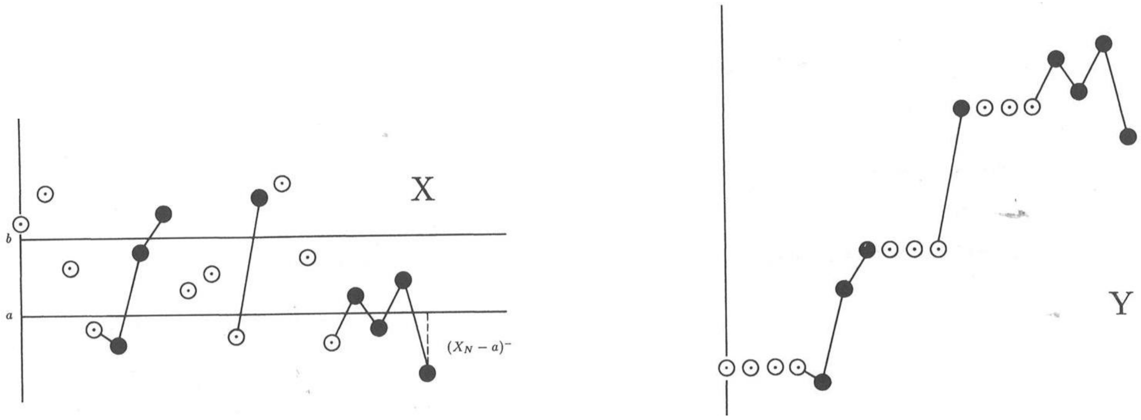
**Processus aléatoires**
*ENS Paris*, 2016-2017

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

# TD 7 : Convergence des martingales
# Corrigé

Lundi 7 Novembre

**Exercice 1** (Une jolie image)
Quel est le rapport entre l'image suivante et la preuve du théorème de convergence des martingales ?




<u>*Solution de l'exercice 1*</u>
Il s'agit de la preuve du lemme des montées de Doob. Ici, $X$ est une martingale (par exemple, le cours d'une action), et $Y$ est le gain réalisé par un individu qui achète et vend des actions selon la stratégie suivante : dès que le cours descend en-dessous de $a$ il achète une action, dès qu'il remonte au-dessus de $b$ il la revend et ainsi de suite. Notre boursicoteur gagne $(b-a)$ par montée de $X$ entre $a$ et $b$, et perd au plus $(X_n - a)^-$, qui est d'espérance bornée par hypothèse. Comme $Y$ est une martingale, l'espérance des gains est égale à l'espérance des pertes, donc le nombre de montées est aussi d'espérance bornée quand $n \to +\infty$.

**Exercice 2** (Exemples et contre-exemples)

1. Trouver un exemple de martingale qui n'est pas bornée dans $L^1$.
2. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. mais n'est pas bornée dans $L^1$.
3. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

1. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$.
2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables indépendantes vérifiant

$$\mathbb{P}(X_n = 100^n) = \mathbb{P}(X_n = -100^n) = \frac{1}{10^n}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{10^n},$$

et $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \geq 0$. On vérifie facilement que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout $n$, donc $M$ est une martingale. On a de plus $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{10^n} < +\infty$, donc par Borel-Cantelli, presque sûrement, $X_n = 0$ pour $n$ assez grand et $(M_n)$ converge p.s. Enfin, pour tout $n$, si $X_n = 100^n$ alors $M_n \geq \frac{100^n}{2}$ donc

$$\mathbb{E}\left[|M_n|\right] \geq \frac{100^n}{2}\mathbb{P}\left(M_n \geq \frac{100^n}{2}\right) = \frac{100^n}{2}\mathbb{P}\left(X_n = 100^n\right) = \frac{10^n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

3. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables indépendantes vérifiant

$$\mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = \frac{n^2}{n^2+1} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(X_n = -n^2\right) = \frac{1}{n^2+1},$$

et $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$. On vérifie facilement que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout $n$, donc $M$ est une martingale. On a de plus $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1} < +\infty$, donc par Borel-Cantelli, presque sûrement, $X_n = 1$ pour $n$ assez grand et $M_n \to +\infty$ p.s.

**Exercice 3** (Urne de Polya)
À l'instant 0, une urne contient $a$ boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule uniformément et on la remplace par deux boules de sa couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 1. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note $Y_n$ et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant $n$. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

1. Donner $\mathbb{P}\left(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n\right)$ et $\mathbb{P}\left(Y_{n+1} = Y_n | \mathcal{F}_n\right)$.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note $U$, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.
3. *Cas* $a = b = 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $Y_n$ suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$. En déduire la loi de $U$.
4. *Cas général.* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$ :

$$Z_n \;=\; \frac{Y_n(Y_n+1)\ldots(Y_n+k-1)}{(N_0+n)(N_0+n+1)\ldots(N_0+n+k-1)}\,.$$

Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.
5. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). Expliquer pourquoi on a caractérisé la loi de $U$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

1. On a

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathscr{F}_n) \;=\; \mathbb{P}\left(\text{la } n^{\text{ième}} \text{ boule tirée est blanche}|\mathscr{F}_n\right) \;=\; X_n,$$

et de même

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n|\mathscr{F}_n) \;=\; 1 - X_n\,.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, la variable $X_n$ est $\mathscr{F}_n$-mesurable, $X_n \in [0,1]$ donc est intégrable et, d'après la question précédente,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \frac{Y_n+1}{N_0+n+1}X_n + \frac{Y_n}{N_0+n+1}(1-X_n) = \frac{X_n+Y_n}{N_0+n+1} = X_n\,,$$

donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale. Elle est de plus bornée dans $L^k$ pour tout $k$, donc elle converge p.s. et dans $L^k$ pour tout $k$ vers une variable $U$. On a donc bien

$$\mathbb{E}[X_n^k] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[U^k].$$

3. On raisonne par récurrence sur $n$. L'initialisation à $n = 0$ est immédiate. Soit $n \geq 1$ et supposons que la loi de $Y_{n-1}$ est la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. Soit aussi $k \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n = k) &= \mathbb{P}(Y_n = k \text{ et } Y_{n-1} = k) + \mathbb{P}(Y_n = k \text{ et } Y_{n-1} = k-1) \\
&= \mathbb{P}(Y_{n-1} = k)\mathbb{P}(Y_n = k | Y_{n-1} = k) + \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1)\mathbb{P}(Y_n = k | Y_{n-1} = k-1) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{la } n\text{-ième boule prise est rouge } | Y_{n-1} = k)}{n} \\
&\quad + \frac{\mathbb{P}(\text{la } n\text{-ième boule prise est blanche} | Y_{n-1} = k-1)}{n} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1-k}{n+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{k-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(\text{les } n \text{ boules tirées sont rouges}) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} \cdots \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que $Y_n$ suit bien une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$.
Il en découle que $X_n$ suit une loi uniforme sur $\{1/(n+2), 2/(n+2), ..., (n+1)/(n+2)\}$ pour tout $n \geq 0$. Or $(X_n)$ converge p.s. donc en loi vers $U$, donc $U$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

4. Pour tout $n \geq 0$, la variable $Z_n$ est $\mathscr{F}_n$-mesurable et $Z_n \in [0, 1]$ donc est intégrable, et

$$Z_{n+1} = \begin{cases} \frac{Y_n \dots (Y_n+k-1)}{(N_0+n+1)(N_0+n+2)\dots(N_0+n+k)} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n \\ \frac{(Y_n+1)\dots(Y_n+k)}{(N_0+n+1)(N_0+n+2)\dots(N_0+n+k)} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n + 1 \end{cases}$$

ou encore

$$Z_{n+1} = \begin{cases} Z_n \cdot \frac{N_0+n}{N_0+n+k} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n \\ Z_n \cdot \frac{N_0+n}{N_0+n+k} \cdot \frac{Y_n+k}{Y_n} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n + 1 \end{cases}.$$

Le calcul pour en déduire que $(Z_n)$ est bien une martingale en utilisant la question 1 est laissé en exercice.
En particulier, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_0] = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k-1)}$$

car $Y_0 = a$ (il y a $a$ boules blanches à l'instant initial). De plus, $\mathbb{E}[Z_n]$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{Y_n^k + P_1(Y_n)}{n^k + P_2(n)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{Y_n^k}{n^k}\right] \frac{n^k}{n^k + P_2(n)} + \mathbb{E}\left[\frac{P_1(Y_n)}{n^k + P_2(n)}\right]
\end{aligned}$$

où $P_1$ et $P_2$ sont des polynômes de degré $\leq k-1$. D'après la question 2, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$ donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[U^k]$ d'où pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}[U^k] = \mathbb{E}[Z_0] = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}.$$

5. Soit $X$ une v.a. réelle bornée et $c > 0$ telle que $|X| \leq c$ p.s. Soit $\phi_X$ la fonction caractéristique de $X$, i.e., pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$. On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 0} \frac{(itX)^n}{n!}\right].$$

Or on a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(itX)^n}{n!} \xrightarrow[N\to\infty]{p.s.} \sum_{n\geq 0} \frac{(itX)^n}{n!}$$

et cette convergence est dominée par la constante $e^{|t|c}$. Donc par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\phi_X(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}[X^n].$$

Comme $U$ est à valeurs dans $[0,1]$, sa fonction caractéristique $\phi_U$ se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ comme décrit ci-dessus. Les $\mathbb{E}[U^k]$ pour $k \geq 1$ décrivent donc complètement la fonction caractéristique de $U$, qui elle même caractérise la loi de $U$.

**Remarque** Plus précisément, la loi de $U$ est la loi $\beta(a,b)$ de densité

$$\frac{1}{B(a,b)} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(u)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Il suffit pour le vérifier de calculer les moments de la loi $\beta(a,b)$ et de vérifier qu'ils coïncident avec le résultat de la question 4, ce qui est laissé en exercice au lecteur courageux (ou à un logiciel de calcul).

**Exercice 4** (Théorème de Kakutani)
Soit $X_1,\ldots,X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes positives d'espérance 1. Pour $n \geq 0$ on pose

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k \qquad (\text{avec } M_0 = 1).$$

1. Montrer que $(M_n)$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable $M_\infty$.
   Pour $k \geq 1$, soit $a_k = \mathbb{E}[\sqrt{X_k}] \in ]0,1]$ (par Cauchy-Schwarz) et

$$N_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{X_k}}{a_k} \qquad (\text{avec } N_0 = 1).$$

2. En utilisant le processus $(N_n)$, montrer que les cinq conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\mathbb{E}[M_\infty] = 1$,
   (b) $M_n \to M_\infty$ dans $L^1$ quand $n \to \infty$,
   (c) la martingale $(M_n)$ est uniformément intégrable,
   (d) $\prod_{k=1}^{\infty} a_k > 0$,
   (e) $\sum_{k=1}^{\infty}(1-a_k) < \infty$.
   Montrer que si l'une des conditions précédentes n'est pas remplie alors $M_\infty = 0$ presque sûrement.

*Solution de l'exercice 4*

1. Pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbb{E}[M_n] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = 1 < +\infty$. De plus, on a

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[M_n X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = M_n\mathbb{E}[X_{n+1}] = M_n$$

   donc $M$ est bien une martingale. Elle est positive, donc converge p.s.
2. Le cours donne $(b) \iff (c)$. Il est classique (prépa) que $(d) \iff (e)$ (passer au log et faire un équivalent). De plus $(b) \Rightarrow (a)$, et la réciproque est donnée par le lemme de Scheffé.
   De plus, $(N_n)$ est une martingale positive donc converge p.s. vers une variable $N_\infty$. Si $\prod a_k > 0$ alors

$$\mathbb{E}\left[N_n^2\right] = \frac{\mathbb{E}[M_n]}{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{\prod a_k}$$

donc $N_n = \sqrt{M_n}/\prod_{k=1}^n a_k$ est bornée dans $L^2$ et converge dans $L^2$ vers $\frac{\sqrt{M_\infty}}{\prod a_k}$. On en déduit que $M_n \to M_\infty$ dans $L_1$, ce qui prouve $(d) \Rightarrow (b)$.
Enfin, si $\prod a_k = 0$ alors $N_n = \frac{\sqrt{M_n}}{\prod_{k=1}^n a_k}$ converge p.s. vers une valeur finie $N_\infty$ et le dénominateur tend vers 0, donc $M_n \to 0$ p.s et $M_\infty = 0$ p.s. On en déduit $\neg(d) \Rightarrow \neg(a)$ et la boucle est bouclée.

**Exercice 5** (Théorème de Rademacher)
Le but de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad Z_n = 2^n \left( f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n) \right).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X).$$

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathscr{F}_n$-martingale bornée (où $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$).
3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire $Z$, limite p.s. et dans $L^1$ de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $Z = g(X)$.
4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s. :

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

1. On remarque que, pour $0 \leq k \leq n$, $X_k = 2^{-k}\lfloor 2^k X_n \rfloor$. On peut l'écrire proprement, ou faire un dessin pour s'en convaincre... Ainsi, pour $0 \leq k \leq n$, $X_k$ est $\sigma(X_n)$-mesurable. On en déduit que $\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n)$.
   De plus, pour tout $n \geq 0$, par définition de $X_n$, on sait que $X_n$ est $\sigma(X)$-mesurable. Ainsi, on a l'inclusion
$$\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) \subset \sigma(X).$$
   Enfin, $X_n$ converge p.s. vers $X$ quand $n$ tend vers l'infini, donc $X$ est $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$-mesurable pour tout $n \geq 0$. Ainsi, on obtient l'inclusion réciproque
$$\sigma(X) \subset \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

2. Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable continue. Alors $h$ est bornée sur $[0,1]$ donc $h(X_n)$ est intégrable pour tout $n$. On a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X_n = k/2^n}\right] &= \mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X \in [k/2^n, (2k+1)/2^{n+1}[}\right] + \mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X \in [(2k+1)/2^{n+1}, (k+1)/2^n[}\right] \\ &= 2^{-(n+1)}\left(h\left(\frac{k}{2^n}\right) + h\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right).\end{aligned}$$
   On en déduit
$$\mathbb{E}(h(X_{n+1}) \mid X_n) = \frac{h(X_n)}{2} + \frac{h\left(X_n + 2^{-(n+1)}\right)}{2}.$$

Pour tout $n \geq 0$, la variable $Z_n$ est $\mathscr{F}_n$-mesurable, et $|Z_n| \leq L$ donc $Z_n$ est intégrable. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= 2^{n+1}\mathbb{E}\left[f(X_{n+1}+2^{-(n+1)}) - f(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n\right] \\
&= 2^{n+1}\mathbb{E}\left[f(X_{n+1}+2^{-(n+1)}) - f(X_{n+1}) \mid X_n\right] \\
&= 2^n\left[f(X_n+2^{-(n+1)}) - f(X_n) + f(X_n+2^{-n}) - f(X_n+2^{-(n+1)})\right] \\
&= Z_n\,,
\end{aligned}$$

en utilisant à la deuxième ligne la première égalité de tribus de la question 1. Donc $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale bornée par $L$.

3. D'après la question 2, on sait que $(Z_n)$ est une martingale bornée dans $L^p$ pour tout $p > 0$, donc $(Z_n)$ converge p.s. et dans $L^1$. On note $Z$ sa limite. Pour tout $n \geq 0$, $Z_n$ est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ donc $Z$ est mesurable par rapport à la tribu $\bigcap_{n\geq 0}\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$. D'après la question 1, $Z$ est ainsi $\sigma(X)$-mesurable. Il existe donc une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne telle que $Z = g(X)$. De plus, $Z$ étant bornée par $L$, on peut choisir $g$ bornée (en prenant remplaçant $g$ par $g \wedge L$ par exemple).
4. Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. La variable $h(X)$ est intégrable et on a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$\mathbb{E}\left[h(X)\mathbb{1}_{X_n = k2^{-n}}\right] = \mathbb{E}\left[h(X)\mathbb{1}_{X\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[}\right] = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} h(x)\mathrm{d}x.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[h(X) \mid X_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} h(x)\mathrm{d}x.$$

La $(\mathscr{F}_n)$-martingale $(Z_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. et dans $L^1$ vers $Z$, donc $Z_n = \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n]$ pour tout $n \geq 0$. On a donc p.s.

$$Z_n = \mathbb{E}[g(X)|X_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$

5. D'après la question 4., pour tout $n \geq 0$,

$$f(X_n+2^{-n}) - f(X_n) = \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u \quad \text{p.s.}$$

Donc, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n}) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u$$

puis, en sommant, pour tout $0 \leq k \leq 2^n$,

$$f(k2^{-n}) = f(0) + \int_0^{k2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u\,.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f\left(2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor\right) = f(0) + \int_0^{2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor} g(u)\mathrm{d}u$$

et en faisant tendre $n$ vers l'infini, par continuité de $f$ on obtient

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u.$$

**Exercice 6** (Singe savant)
Un chimpanzé est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois une lettre choisie uniformément parmi les 26 lettres de l'alphabet, indépendamment des lettres précédentes. On note $T$ le premier temps auquel les 11 dernières lettres écrites par le singe forment le mot "ABRACADABRA". Pour calculer $\mathbb{E}[T]$, on va définir une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup (beaucoup, beaucoup) de bananes. On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \ldots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1 banane avec lui sur l'événement

$$\{\text{la } n\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "A"}\}.$$

Si il perd, il part (et le singe met 1 banane dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26 euros du singe qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+1\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "B"}\}.$$

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit $26^2$ bananes qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+2\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "R"}\}.$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce que "ABRACADABRA" sorte de la machine. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe.

1. Montrer que le nombre de bananes dans le sac du chimpanzé au temps $n$ est une martingale pour $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$, où $\mathscr{F}_n$ est la tribu engendrée par les $n$ premières lettres tapées par l'animal.
2. En déduire
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$
3. Refaire le même exercice en remplaçant "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK". Commenter.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

1. Cela est dû au fait que les paris sont à chaque étape "équilibrés" : conditionnellement à $\mathscr{F}_n$, l'espérance de gain de chacun des parieurs est nulle donc l'espérance de gain du singe aussi.
2. Supposons d'abord qu'on puisse appliquer le théorème d'arrêt à $T$ : alors l'espérance du nombre de bananes dans le sac du singe au temps $T$ est égale au nombre de bananes au temps 0, donc l'espérance de ses gains est égale à l'espérance de ses pertes. Les pertes du singe sont faciles à calculer : au moment où ABRACADABRA sort, il y a 3 parieurs derrière le singe : un qui est arrivé juste avant le premier "A" et qui repart avec $26^{11}$ bananes, un qui est arrivé juste avant le second "A" et qui repart avec $26^4$ bananes, et un qui est arrivé juste avant le dernier "A" et qui repart avec 26 bananes. Les pertes du singe sont donc de $26^{11} + 26^4 + 26$ bananes. D'autre part, chacun des $T$ parieurs qui est passé a donné une banane au singe (y compris les 3 parieurs qui gagnent à la fin), donc les gains du singe sont de $T$ bananes.

   Pour écrire cela proprement, on peut appliquer le théorème d'arrêt à $T \wedge t$. Les gains du singe au temps $T \wedge t$ valent alors $T \wedge t$ et on a $\mathbb{E}[T \wedge t] \to \mathbb{E}[T]$ par convergence monotone. Les pertes du singe sont majorées par $26^{11} + 26^{10} + \cdots + 1$ et tendent p.s. vers $26^{11} + 26^4 + 26$ quand $t$ tend vers $+\infty$, donc leur espérance tend vers $26^{11} + 26^4 + 26$ bananes par convergence dominée.
3. On obtient $\mathbb{E}[T] = 26^{11}$, soit une espérance strictement inférieure à celle du temps d'apparition de ABRACADABRA. Si cela peut paraître contre-intuitif, la raison est que les sous-mots qui se répètent ("A" et "ABRA") introduisent des corrélations positives entre l'apparition de "ABRACADABRA" à deux rangs différents, ce qui augmente les chances que l'événement se produise très tard.

**Exercice 7** (Propriété de Liouville)
Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins) et $h : V \to \mathbb{R}$. On dit que $h$ est *harmonique sur $G$* si pour tout $x \in V$, on a

$$h(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} h(y),$$

où la somme est effectuée sur les voisins $y$ de $x$ et où $\deg(x)$ est le nombre de ces voisins. On dit que $G$ vérifie la *propriété de Liouville* si toute fonction bornée harmonique sur $G$ est constante.

1. Montrer que si $h$ est harmonique et $(X_n)$ est une marche aléatoire simple sur $G$, alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que si la marche aléatoire simple sur $G$ est récurrente (i.e. si elle visite presque sûrement tous les points une infinité de fois), alors $G$ vérifie la propriété de Liouville.
3. Soient $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d x_i \equiv \sum_{i=1}^d y_i \pmod 2$. Montrer qu'il existe $(X_n)$ et $(Y_n)$ deux marches aléatoires simples (non indépendantes !) issues respectivement de $x$ et $y$ telles que p.s., pour $n$ assez grand, $X_n = Y_n$.
4. En déduire que $\mathbb{Z}^d$ vérifie la propriété de Liouville.
5. Donner un exemple de graphe (connexe, localement fini) ne vérifiant pas la propriété de Liouville.

<u>*Indication :*</u> Pour la question 3, commencer par le cas $d = 1$ puis essayer d'adapter à $d$ quelconque.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

1. Soit $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Conditionnellement à $\mathscr{F}_n$, le sommet $X_{n+1}$ est uniforme parmi les voisins de $X_n$, donc $\mathbb{E}\left[h(X_{n+1})|\mathscr{F}_n\right]$ est la moyenne de $h$ sur les voisins de $X_n$, c'est-à-dire $X_n$ car $h$ est harmonique.
2. Soit $h$ harmonique bornée sur $G$. Soient $x, y \in V$ et $(X_n)$ une marche aléatoire simple issue de $x$. Alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale, donc elle converge p.s. Or, elle visite une infinité de fois $x$ et $y$, donc elle prend une infinité de fois les valeurs $h(x)$ et $h(y)$, donc $h(x) = h(y)$, et ce pour tous $x$ et $y$. La fonction $h$ est donc constante, donc $G$ est Liouville.
3. Dans le cas $d = 1$, l'idée est de faire démarrer deux marches aléatoires indépendantes $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ issues de $x$ et $y$. Par récurrence de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ (plus la condition de parité), le temps $\tau_1 = \inf\{n|\widetilde{X}_n = \widetilde{Y}_n\}$ est fini p.s. On prend alors $X = \widetilde{X}$ ainsi que $Y_n = \widetilde{Y}_n$ pour $n \leq \tau_1$ et $Y_n = \widetilde{X}_n$ pour $n \geq \tau_1$.

   Dans le cas général, il faut "coupler les coordonnées une par une" : on démarre deux marches indépendantes de $x$ et $y$, et on note $\tau_1$ le premier temps où leurs coordonnées selon $e_1$ coïncident. À partir de $\tau_1$, on applique la stratégie du cas $d = 1$ pour que les coordonnées selon $e_1$ restent les mêmes pour $n \geq \tau_1$. Puis on attend $\tau_2$, le premier temps où les coordonnées selon $e_2$ coïncident, et ainsi de suite.

   Les détails sont laissés en exercice, vous pouvez aussi venir me voir au bureau V2.
4. Soit $h$ harmonique bornée sur $G$ et soient $x$, $y$, $X$ et $Y$ comme dans la question précédente. Alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ et $(h(Y_n))_{n\geq 0}$ sont deux martingales bornées, donc elles convergent p.s. et dans $L^1$ vers respectivement $X_\infty$ et $Y_\infty$. Comme $X_n = Y_n$ pour $n$ assez grand, on a $X_\infty = Y_\infty$ p.s. Par convergence $L^1$, on peut donc écrire

   $$h(x) = \mathbb{E}\left[X_\infty)\right] = \mathbb{E}\left[Y_\infty\right] = h(y),$$

   donc $h$ est constante sur $\{x \in \mathbb{Z}^d | \sum_{i=1}^d x_i \equiv 0 \pmod 2\}$, et il est facile d'en conclure que $h$ est constante sur $V$.
5. Considérer l'arbre binaire infini. La marche aléatoire est transiente (car la "hauteur" augmente de 1 avec proba $\frac{2}{3}$ et diminue de 1 avec proba $\frac{1}{3}$), donc à partir d'un certain rang elle reste soit dans la moitié gauche de l'arbre, soit dans la moitié droite. On peut alors poser

   $$h(x) = \mathbb{P}\left(\text{la marche aléatoire issue de } x \text{ finit dans la moitié gauche de l'arbre}\right).$$

   On vérifie facilement que $h$ est harmonique et bornée (par 1). De plus, si $x$ est "très haut" dans la moitié gauche de l'arbre, il a une très faible probabilité de redescendre jusqu'à la racine, donc $h(x)$ est proche de 1. Les détails sont laissés en exercice.