Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2017-2018 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 10 : Toujours des martingales !

Mercredi 22 Novembre

Exercice 1 (Martingales à incréments bornés)
Soit M une martingale. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $|M_{n+1} - M_n| \leq c$ presque sûrement pour tout n. Montrer que p.s., soit M converge, soit $\liminf_{n \to +\infty} M_n = -\infty$ et $\limsup_{n \to +\infty} M_n = +\infty$.

<u>Indication :</u> On pourra utiliser les martingales $M^{a,b} = \left(M_{n \wedge \tau_{a,b}}\right)$, où $\tau_{a,b}$ est le premier instant où M passe en-dessous de $-a$ ou au-dessus de b.

Exercice 2 (Processus de Galton–Watson surcritique)
Soit μ une loi sur $\mathbb{N}$ telle que $\sum_i i\mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2 \mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ. On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.
3. On pose $M_n = m^{-n} X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞.
4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \to M_\infty$ dans L^2.
5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q. En déduire que $q = p$. Qu'est-ce-que cela signifie sur la croissance de X_n ?

Exercice 3 (Propriété de Liouville)
Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins) et $h : V \to \mathbb{R}$. On dit que h est *harmonique sur* G si pour tout $x \in V$, on a

$$h(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} h(y),$$

où la somme est effectuée sur les voisins y de x et où $\deg(x)$ est le nombre de ces voisins. On dit que G vérifie la *propriété de Liouville* si toute fonction bornée harmonique sur G est constante.

1. Montrer que si h est harmonique et (X_n) est une marche aléatoire simple sur G, alors $(h(X_n))_{n \geq 0}$ est une martingale.

2. Montrer que si la marche aléatoire simple sur G est récurrente (i.e. si elle visite presque sûrement tous les points une infinité de fois), alors G vérifie la propriété de Liouville.
3. Soient $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d x_i \equiv \sum_{i=1}^d y_i \pmod 2$. Montrer qu'il existe (X_n) et (Y_n) deux marches aléatoires simples (non indépendantes !) issues respectivement de x et y telles que p.s., pour n assez grand, $X_n = Y_n$.
4. En déduire que $\mathbb{Z}^d$ vérifie la propriété de Liouville.
5. Donner un exemple de graphe (connexe, localement fini) ne vérifiant pas la propriété de Liouville.

Indication : Pour la question 3, commencer par le cas $d = 1$ puis essayer d'adapter à d quelconque.

Exercice 4 (Une preuve de la loi forte des grands nombres)
Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(Z_n)}{n^2} < +\infty$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{Z_j}{j} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j \,.$$

1. Montrer que M_n converge p.s. quand n tend vers $+\infty$.
2. En exprimant S en fonction de M, en déduire $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$.
3. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] = 0$. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq n}$. Montrer que :
(i) $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X]$,
(ii) $\mathbb{P}\left(\exists n \geq 1, \forall j \geq n, X_j = Y_j\right) = 1$,
(iii) $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$.
4. En déduire la loi forte des grands nombres.

Exercice 5
Que représente la jolie image ci-dessous ?