Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2017-2018 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 11 : Chaînes de Markov

Mercredi 29 Novembre

1 Chaînes de Markov

Exercice 1 (Markov ou pas Markov ?)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Lesquels des processus suivants sont des chaînes de Markov sur $\mathbb{Z}$? Pour ceux qui le sont, donner la matrice de transition.

1. $A = (S_n)_{n\geq 0}$,
2. $B = (S_n + n)_{n\geq 0}$,
3. $C = \left(S_n + n^2\right)_{n\geq 0}$,
4. $D = (S_n + 10^n)_{n\geq 0}$,
5. $E = (S_n + (-1)^n)_{n\geq 0}$,
6. $F = (|S_n|)_{n\geq 0}$,
7. $G = \left(S_n^2 - n\right)_{n\geq 0}$,
8. $H = (S_{2n})_{n\geq 0}$.

Exercice 2 (Bricoler une chaîne de Markov à partir de variables indépendantes)
Soient S un ensemble dénombrable et $(G, \mathcal{G})$ un ensemble mesurable. Soient aussi $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $(G, \mathcal{G})$ et $\phi : S \times G \to S$ une application mesurable. On définit une suite de variables $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans S par $X_0 = x \in S$ et $X_{n+1} = \phi(X_n, Z_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.

Exercice 3 On dit qu'un graphe G est transitif si pour tous sommets u et v de G, il existe un automorphisme Φ de G tel que $\Phi(u) = v$ (autrement dit, les sommets de G jouent tous le même rôle). Soit G un graphe (fini ou infini) transitif et localement fini, et soit X une marche aléatoire simple sur G issue d'un sommet u.

1. Montrer que pour tout sommet v et tout $k \geq 0$, on a
$$\mathbb{P}\left(X_{2k} = u\right) \geq \mathbb{P}\left(X_{2k} = v\right).$$
2. En déduire que $\mathbb{P}\left(X_{2k} = u\right)$ est décroissante en k.

Exercice 4 (h-transformée d'une chaîne de Markov)
Soit S un ensemble dénombrable et $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur S de matrice de transition Q. Soit $h : S \to \mathbb{R}_+$. Soit P la matrice définie sur $S_+ = \{x \in S | h(x) > 0\}$ par la formule
$$P(i,j) = \frac{h(j)}{h(i)} Q(i,j).$$

1. Donner une hypothèse sur h qui garantit que P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur S^+. Que signifie cette hypothèse si X est la marche aléatoire simple sur un graphe ? *On dit alors que P est la h-transformée de Q.*
2. Soit Y une chaîne de Markov de matrice de transition P. Déterminer la dérivée de Radon-Nikodým de la loi de $(Y_i)_{0\leq i\leq n}$ par rapport à celle de $(X_i)_{0\leq i\leq n}$.
3. On considère la marche aléatoire simple S sur $\mathbb{Z}$. On note $T_i = \inf\{n \geq 0 | S_n = i\}$. Pour $N > 0$ et $k \in [\![0, N]\!]$, on définit
$$\mathbb{P}_k^{(N)} = \mathbb{P}_k(\,\cdot\,| T_N < T_0).$$

(a) On rappelle que $\mathbb{P}_k(T_N < T_0) = \frac{k}{N}$. Montrer que sous $P_k^{(N)}$, $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.

(b) Trouver une fonction $h : [\![0, N]\!] \to \mathbb{R}_+$ telle que la matrice de transition de la question précédente soit la h-transformée de la matrice de transition de la marche aléatoire simple.

(c) Proposer une définition de la "marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ conditionnée à rester positive".

2 Propriété de Markov forte

Exercice 5 Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 0. Pour tout $i \geq 0$, on pose $T_i = \min\{n \geq 0 | S_n = i\}$ (on rappelle que tous les T_i sont finis p.s. par récurrence de S).

1. Montrer que les variables $T_{i+1} - T_i$ sont i.i.d.
2. On suppose maintenant que S est une marche biaisée négativement, i.e. les $S_{n+1} - S_n$ sont i.i.d. et
$$\mathbb{P}\left(S_{n+1} - S_n = -1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(S_{n+1} - S_n = +1\right) > \frac{1}{2}.$$
Montrer sans calcul que $M = \max\{S_n | n \geq 0\}$ est une variable géométrique.

Exercice 6 (La fourmi et la montre)
Une fourmi se promène sur une montre de la manière suivante : elle démarre sur le chiffre 0 et, toutes les minutes, elle se déplace avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la gauche et avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la droite. La fourmi s'arrête quand elle a visité tous les chiffres de la montre. On note C le dernier chiffre de la montre visité par la fourmi. Montrer que C est une variable uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 11\}$.

Exercice 7 (Un petit résultat technique utile)
Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables i.i.d. à valeurs entières. Pour tout $n \geq 0$, soient $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S_n^* = \max\{|S_k| | 0 \leq k \leq n\}$. On se fixe $n \geq 0$, et $\varepsilon, A > 0$ tels que pour tout $0 \leq k \leq n$,
$$\mathbb{P}\left(|S_k| \geq A\right) \leq \varepsilon.$$
Montrer que
$$\mathbb{P}\left(|S_n^*| \geq 2|A|\right) \leq 2\varepsilon.$$

Exercice 8 Que représente cette la jolie image ci-dessous ?