Processus aléatoires
ENS Paris, 2017-2018

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 13 : Chaînes de Markov : fonctions harmoniques, théorème ergodique

Mercredi 13 Décembre

1 Chaînes de Markov et fonctions harmoniques

Exercice 1 (Un contre-exemple)
On note G le graphe $\mathbb{Z}^3$, auquel on a recollé en 0 une copie de $\mathbb{N}$. Plus formellement, l'ensemble des sommets de G est $\mathbb{Z}^3 \cup \mathbb{N}^*$, et deux sommets x et y de G sont reliés si et seulement si x et y sont voisins dans $\mathbb{Z}^3$, ou x et y sont voisins dans $\mathbb{N}^*$, ou $x = (0, 0, 0) \in \mathbb{Z}^3$ et $y = 1 \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que toute fonction harmonique bornée sur G est constante.
2. Montrer qu'il existe une fonction harmonique positive non-constante sur G.

Exercice 2 (h-transformée d'une chaîne de Markov)
Soit S un ensemble dénombrable et $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur S de matrice de transition Q. Soit $h : S \to \mathbb{R}^+$, et soit $S_+ = \{x \in S | h(x) > 0\}$. On suppose que h est harmonique sur S^+, i.e. $h(x) = \sum_{y\in S} Q(x, y)h(y)$ pour tout $x \in S^+$. Soit P la matrice définie sur $S_+ = \{x \in S|h(x) > 0\}$ par la formule

$$P(x, y) = \frac{h(y)}{h(x)}Q(x, y).$$

Pour tout $x \in S$, on pose $\tau_x = \min\{n \geq 0|X_n = x\}$.

1. Vérifier que P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur S^+.
2. On suppose que X est transiente et que $\mathbb{P}_x(\tau_y = +\infty) > 0$. Soient $x \neq y \in S$. On note $\mathbb{P}_x^{(y)} = \mathbb{P}_x(\cdot|\tau_y = +\infty)$ la loi de X démarrée en x, conditionnée à ne jamais taper y. Montrer que X sous $\mathbb{P}_x^{(y)}$ est une chaîne de Markov, et déterminer sa matrice de transition.
3. Soit X la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Comme dans la question précédente, étudier le processus $(X_{n\wedge\tau_0\wedge\tau_N})_{n\geq 0}$ sous $\mathbb{P}_1(\cdot|\tau_N < \tau_0)$ pour $N \geq 2$. Proposer une définition de la "marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ conditionnée à rester positive".

2 Théorème ergodique

Dans cette section, on pourra utiliser le théorème suivant, dont une version plus générale sera montrée en cours la semaine prochaine.

Théorème (théorème ergodique pour les chaînes de Markov)
Soit X une chaîne de Markov irréductible de matrice de transition Q sur un espace d'états fini S. Soit π son unique mesure invariante. On suppose qu'il existe x tel que $Q(x,x) > 0$. Alors pour tous $x, y \in S$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_x (X_n = y) = \pi(y).$$

Exercice 3 (Les parapluies)
Michel possède k parapluies qu'il garde soit chez lui, soit dans son bureau. Le matin, avant d'aller au travail, il regarde par la fenêtre le temps qu'il fait :

- s'il fait beau, il ne prend pas de parapluie ;
- s'il pleut et qu'il a un parapluie chez lui, il prend le parapluie et va au travail ;
- s'il pleut et qu'il n'y a plus de parapluie, il décide de rester chez lui.

Le soir, il fait la même chose (s'il pleut et qu'il n'a pas de parapluies, il décide de rentrer quand même). On suppose que chaque demi-journée, il pleut avec probabilité p et il fait beau avec probabilité $1-p$ avec $0 < p < 1$, et que de plus, les météos des demi-journées sont indépendantes. Michel souhaite ne rater en moyenne qu'une journée de travail par mois. Sachant qu'il pleut 111 jours par an à Paris, combien de parapluies doit-il posséder pour cela ?

Exercice 4 (Rangement sur une étagère)
Chaque matin un étudiant prend un des trois livres (numérotés de 1 à 3) posés sur son étagère. La probabilité qu'il choisisse le livre i est α_i, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, où $0 < \alpha_i < 1$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, et les choix qu'il fait jour après jour sont indépendants. Le soir, il replace le livre qu'il a pris à gauche des autres, sans les déranger. Quel est le comportement asymptotique de p_n, la probabilité que le n-ième matin au réveil l'étudiant trouve ses livres rangés dans l'ordre $(1, 2, 3)$ de gauche à droite ?

Exercice 5 (Monopoly)
Alice et Bob jouent au Monopoly. Comme il n'y a qu'un nombre fini de billets, ils se fixent la règle suivante : si un des deux joueurs doit recevoir de l'argent de la banque mais que la banque n'a pas assez de billets pour lui verser cet argent, il ne le reçoit pas. Montrer que la partie va se terminer presque sûrement.

Exercice 6
Que représente la jolie image ci-dessous ?