Processus aléatoires | Thomas Budzinski
ENS Paris, 2017-2018 | Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 1 : Vers le mouvement brownien

Vendredi 15 Septembre

1 Variables gaussiennes et vecteurs gaussiens

On rappelle qu'un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est gaussien si pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)$, la variable $u \cdot X$ est gaussienne. En notant $\mu = \mathbb{E}[X]$ la *moyenne* de X et $K = (\mathrm{cov}(X_i, X_j))_{1 \le i,j \le d}$ sa *matrice de covariance*, on a alors pour tout $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}\left[e^{iu \cdot X}\right] = \exp\left(iu \cdot \mu - \frac{1}{2}{}^t u K u\right).$$

Exercice 1 Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien centré, i.e. $\mathbb{E}[X] = 0$. Montrer que X_i et X_j sont indépendantes ssi $\mathbb{E}[X_i X_j] = 0$.

Exercice 2 Soient X, Y et ε trois variables aléatoires indépendantes avec X et Y gaussiennes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}$. Lesquels des vecteurs suivants sont gaussiens ?

1. (X, ε)
2. (X, Y)
3. $(X, \varepsilon X)$
4. $(X, \varepsilon Y)$
5. $(\varepsilon|X|, \varepsilon|Y|)$
6. $(X, X+Y)$
7. $(X, X+\varepsilon Y)$
8. $(X, \varepsilon X + Y)$

Exercice 3 Soit K une matrice symétrique définie positive. Expliquer comment simuler un vecteur gaussien centré de matrice de covariance K à partir de variables gaussiennes indépendantes.

Exercice 4 Soit ξ une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $x > 0$.

1. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} \le \mathbb{P}(\xi > x) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(\xi > x) \le e^{-x^2/2}$.

Exercice 5 Soit (ξ_n) une suite de variables gaussiennes sur $\mathbb{R}$ qui converge en loi vers une variable aléatoire X. Montrer que X est gaussienne.

Exercice 6 Construire des variables X, Y et Z telles que les vecteurs (X,Y), (Y,Z) et (Z,X) soient gaussiens mais pas le vecteur (X,Y,Z).

Exercice 7 (Formule de Wick) Soit $(X_1,\dots,X_d)$ un vecteur gaussien centré. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^d X_i\right] = \sum_\pi \prod_{\{a,b\}\in\pi} \mathbb{E}\left[X_a X_b\right],$$

où la somme se fait sur toutes les partitions π de $[\![1,d]\!]$ en parties de taille 2.

2 Problèmes de mesurabilité

Soit $T>0$. On note $\mathcal{C}([0,T])$ l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu sur $\mathcal{C}([0,T])$ qui rend mesurables les applications coordonnées $x\to x(t)$ pour tout $t\in[0,T]$.

Exercice 8 On munit $\mathcal{C}([0,T])$ de la norme uniforme. Montrer que $\mathcal{F}$ coïncide avec la tribu borélienne sur $\mathcal{C}([0,T])$. Est-ce toujours vrai en remplaçant $\mathcal{C}([0,T])$ par l'espace $L^\infty([0,T])$ des fonctions mesurables bornées de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ (toujours muni de la norme uniforme) ?

Exercice 9 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}([0,T])$ muni de la même tribu que ci-dessus. On suppose que pour tout $k\geq 1$ et tous $t_1,\dots,t_k\in[0,T]$, les vecteurs

$$(X_{t_1},X_{t_2},\dots,X_{t_k}) \qquad \text{et} \qquad (Y_{t_1},Y_{t_2},\dots,Y_{t_k})$$

ont la même loi. Montrer que X et Y ont la même loi.

3 Jolie image

Exercice 10 Que représente la jolie image ci-dessous ?