Processus aléatoires
ENS Paris, 2017-2018

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 1 : Vers le mouvement brownien
Corrigé

Vendredi 15 Septembre

1 Variables gaussiennes et vecteurs gaussiens

On rappelle qu'un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est gaussien si pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)$, la variable $u \cdot X$ est gaussienne. En notant $\mu = \mathbb{E}[X]$ la *moyenne* de X et $K = (\mathrm{cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq d}$ sa *matrice de covariance*, on a alors pour tout $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}\left[e^{iu\cdot X}\right] = \exp\left(iu \cdot \mu - \frac{1}{2}{}^t uKu\right).$$

Exercice 1 Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien centré, i.e. $\mathbb{E}[X] = 0$. Montrer que X_i et X_j sont indépendantes ssi $\mathbb{E}[X_i X_j] = 0$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Le sens direct est immédiat. Pour le sens indirect, d'après le rappel ci-dessus, pour tous u et v, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i(uX_i+vX_j)}\right] &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[X_i^2\right]u^2 + \mathbb{E}\left[X_j^2\right]v^2 + 2\mathbb{E}[X_iX_j]uv\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[X_i^2\right]u^2 + \mathbb{E}\left[X_j^2\right]v^2\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left[e^{iuX_i}\right]\mathbb{E}\left[e^{ivX_j}\right].
\end{aligned}$$

Comme la fonction caractéristique détermine la loi, le couple (X_i, X_j) a donc la loi d'une paire de gaussiennes indépendantes.

Exercice 2 Soient X, Y et ε trois variables aléatoires indépendantes avec X et Y gaussiennes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}$. Lesquels des vecteurs suivants sont gaussiens ?

1. (X, ε)
2. (X, Y)
3. $(X, \varepsilon X)$
4. $(X, \varepsilon Y)$
5. $(\varepsilon|X|, \varepsilon|Y|)$
6. $(X, X+Y)$
7. $(X, X+\varepsilon Y)$
8. $(X, \varepsilon X + Y)$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Les vecteurs 2, 4, 6 et 7 sont gaussiens. Les vecteurs 2 et 4 le sont car ils ont leurs deux coordonnées indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Les vecteurs 6 et 7 le sont car ils sont les images respectivement des vecteurs 2 et 4 par une application linéaire.

Le vecteur 1 n'est pas gaussien car sa seconde coordonnée ne l'est pas. Le vecteur 3 ne l'est pas car $\mathbb{P}(X+\varepsilon X=0)=\frac{1}{2}$ donc la somme de ses deux coordonnées n'est pas gaussienne. Pour montrer que le vecteur 8 ne l'est pas, on peut par exemple calculer la fonction caractéristique de la somme de ses coordonnées :

$$\mathbb{E}\left[e^{iu((1+\varepsilon)X+Y)}\right]=\frac{1}{2}\left(1+e^{-u^2}\right)\frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour montrer que le vecteur 5 ne l'est pas, on peut soit calculer aussi sa fonction caractéristique, soit remarquer que $(\varepsilon|X|,\varepsilon|Y|)$ a une densité strictement positive sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ mais une probabilité nulle d'être dans $\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^+$.

Exercice 3 Soit K une matrice symétrique positive. Expliquer comment simuler un vecteur gaussien centré de matrice de covariance K à partir de variables gaussiennes indépendantes.

Solution de l'exercice 3 Soit d la taille de la matrice K et soit $Z=(Z_1,\dots,Z_d)$, où les Z_i sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Notons que Z est un vecteur gaussien de matrice de covariance identité. On cherche à construire notre vecteur de manière linéaire à partir de Z. Plus précisément, soit $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le d}$ une matrice $d\times d$ et soit $X=AZ$. Notons que toute combinaison linéaire des coordonnées de X est une combinaison linéaire des coordonnées de Z, donc est gaussienne, donc X est un vecteur gaussien.

De plus, pour tous $1\le i,j\le d$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_iX_j] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_k a_{i,k}Z_k\right)\left(\sum_\ell a_{j,\ell}Z_\ell\right)\right]\\ &= \sum_{k,\ell} a_{i,k}a_{j,\ell}\,\mathbb{E}\left[Z_kZ_\ell\right]\\ &= \sum_{k,\ell} a_{i,k}a_{j,\ell}\,\mathbb{1}_{k=\ell}\\ &= \sum_k a_{i,k}a_{j,k},\end{aligned}$$

donc la matrice de covariance de X est A^tA. Il nous suffit donc de trouver A telle que $A^tA=K$. Or, comme K est symétrique positive, il existe une matrice orthogonale Q telle que $K={}^tQDQ$, où D est une matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1,\dots,d_n\ge 0$. On peut alors prendre $A={}^tQ\sqrt{D}Q$, où $\sqrt{D}$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\sqrt{d_1},\dots,\sqrt{d_n}$.

Exercice 4 Soit ξ une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $x>0$.

1. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2}\le\mathbb{P}(\xi>x)\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(\xi>x)\le e^{-x^2/2}$.

Solution de l'exercice 4

1. On calcule la dérivée du membre de droite :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x^2}\left(1+x^2\right)e^{-x^2/2}\\ &\le -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\end{aligned}$$

et, comme $\mathbb{P}(\xi>x)=\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt$, on obtient la borne supérieure en intégrant entre x et $+\infty$.

De même, la dérivée du membre de gauche est

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{3}{x^4}\right)e^{-x^2/2}\\ &\ge -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\end{aligned}$$

et on obtient la borne inférieure en intégrant entre x et $+\infty$.

2. Si on pose $f(x) = e^{-x^2/2} - \mathbb{P}(\xi > x)$ alors $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - x\right) e^{-x^2/2}$ donc f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, +\infty\right[$. Comme on a aussi $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5 Soit (ξ_n) une suite de variables gaussiennes sur $\mathbb{R}$ qui converge en loi vers une variable aléatoire X. Montrer que X est gaussienne.

Solution de l'exercice 5 On passe par la fonction caractéristique : pour tout n, on note μ_n l'espérance et σ_n^2 la variance de ξ_n. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_{\xi_n}(u) = \exp\left(i\mu_n u - \frac{\sigma_n^2 u^2}{2}\right) \longrightarrow \varphi_X(u)$. En prenant $u = 1$ et en considérant le module, on obtient que $\exp\left(-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)$ converge donc σ_n^2 converge vers σ^2.

On en déduit que $e^{i\mu_n u}$ converge pour tout u donc μ_n converge vers $\mu \in \mathbb{R}$ (c'est le théorème de Lévy pour des variables déterministes), donc $\varphi_{\xi_n}(u) \longrightarrow \exp\left(i\mu u - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)$ donc X est bien gaussienne (éventuellement de variance nulle).

Exercice 6 Construire des variables X, Y et Z telles que les vecteurs (X, Y), (Y, Z) et (Z, X) soient gaussiens mais pas le vecteur (X, Y, Z).

Solution de l'exercice 6 Prendre par exemple $(X, Y, Z) = (\varepsilon_1|\xi_1|, \varepsilon_2|\xi_2|, \varepsilon_1\varepsilon_2|\xi_3|)$ avec ε_1, ε_2, ξ_1, ξ_2 et ξ_3 indépendantes, les ξ_i gaussiennes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et les ε_i uniformes sur $\{-1, 1\}$.

Il est facile de vérifier que X, Y et Z ont pour loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et que deux d'entre elles sont toujours indépendantes. En particulier, deux d'entre elles forment toujours un vecteur gaussien. En revanche, si (X, Y, Z) était un vecteur gaussien, alors X, Y et Z seraient indépendantes, ce qui est faux, par exemple car $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0, Z < 0) = 0$ et $\mathbb{P}(X > 0)\,\mathbb{P}(Y > 0)\,\mathbb{P}(Z < 0) = \frac{1}{8}$.

Exercice 7 (Formule de Wick) Soit $(X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien centré. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^d X_i\right] = \sum_\pi \prod_{\{a,b\}\in\pi} \mathbb{E}[X_a X_b],$$

où la somme se fait sur toutes les partitions π de $[\![1, d]\!]$ en parties de taille 2.

Solution de l'exercice 7 Soit Z un vecteur gaussien de matrice de covariance identité. Alors il existe une matrice A telle que X a la même loi que AZ (cf. Exercice 3). La formule qu'on veut montrer peut donc se mettre sous la forme

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^d f_i(Z)\right] = \sum_\pi \prod_{\{a,b\}\in\pi} \mathbb{E}[f_a(Z) f_b(Z)],$$

où les f_i sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^d$. Or, cette dernière formule est linéaire en chacune des f_i, donc il suffit de la prouver dans le cas où chaque f_i est de la forme $z \to z_j$. Autrement dit, il suffit de montrer que pour tous $j_1, \dots, j_k$, on a

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^d Z_{j_i}\right] = \sum_\pi \prod_{\{a,b\}\in\pi} \mathbb{E}[Z_{j_a} Z_{j_b}]. \tag{1}$$

Pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, on note k_j le nombre de i tels que $j_i = j$. Alors par indépendance des Z_j, le membre de droite vaut

$$\prod_{j=1}^d \mathbb{E}\left[Z^{k_j}\right],$$

où Z est une variable gaussienne centrée de variance 1. Remarquons tout d'abord que si un des k_j est impair, on a $\mathbb{E}[Z^{k_j}] = 0$ donc le membre de gauche dans (1) est nul. D'autre part, si π est une partition de $[\![1, d]\!]$ en paires, une des paires contient un nombre impair de i tel que $j_i = j$. Soit $\{a, b\}$ cette paire. Alors $j_a \neq j_b$, donc $\mathbb{E}[Z_{j_a} Z_{j_b}] = 0$, donc la contribution de π est nulle. Comme c'est vrai pour tout π, le membre de droite est aussi nul. On suppose donc désormais que tous les k_j sont pairs, et on écrit $k_j = 2\ell_j$.

Les moments de Z se calculent par exemple par intégration par partie, et on obtient $\mathbb{E}\left[Z^{2\ell}\right] = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!}$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, donc le membre de gauche de (1) vaut

$$\prod_{j=1}^{d} \frac{(2\ell_j)!}{2^{\ell_j} \ell_j!}.$$

Il reste à étudier le membre de droite de (1). Soit π une partition en paires et $\{a, b\} \in \pi$. Si $j_a \neq j_b$, alors Z_{j_a} et Z_{j_b} sont indépendantes donc $\mathbb{E}[Z_{j_a} Z_{j_b}] = 0$ et la contribution de π s'annule. Si $j_a = j_b$ pour tout $\{a, b\} \in \pi$, alors la contribution de π vaut 1, donc il suffit de compter le nombre de π qui contribuent. Choisir un tel π revient, pour tout j, à partitionner en paires les i tels que $j_i = j$. Or, le nombre de partitions en paires d'un ensemble à 2ℓ éléments vaut $(2\ell - 1) \times (2\ell - 3) \times \cdots \times 3 \times 1 = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!}$, donc le nombre de π qui contribuent à la somme vaut

$$\prod_{j=1}^{d} \frac{(2\ell_j)!}{2^{\ell_j} \ell_j!},$$

d'où (1), d'où le résultat.

2 Problèmes de mesurabilité

Soit $T > 0$. On note $\mathcal{C}([0, T])$ l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu sur $\mathcal{C}([0, T])$ qui rend mesurable les applications coordonnées $x \to x(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Exercice 8 On munit $\mathcal{C}([0, T])$ de la norme uniforme. Montrer que $\mathcal{F}$ coïncide avec la tribu borélienne sur $\mathcal{C}([0, T])$. Est-ce toujours vrai en remplaçant $\mathcal{C}([0, T])$ par l'espace $L^\infty([0, T])$ des fonctions mesurables bornées de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ (toujours muni de la norme uniforme) ?

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> On note $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0, T]))$ la tribu borélienne issue de la norme uniforme. Les applications coordonnées sont continues pour la norme uniforme, donc mesurables, donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, T])$ par définition de $\mathcal{F}$.

D'autre part, on veut montrer que tous les ouverts de $\mathcal{C}([0, T])$ sont dans $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{C}([0, T])$ est séparable, tout ouvert est une union dénombrable de boules, donc il suffit de montrer que les boules sont dans $\mathcal{F}$. Il suffit donc de montrer que pour tout $x_0 \in \mathcal{C}([0, T])$ fixé, l'application $x \to \|x_0 - x\|_\infty$ est mesurable pour $\mathcal{F}$. Or, c'est vrai car

$$d(x, x_0) = \sup_{t \in [0,T]} |x(t) - x_0(t)| = \sup_{t \in [0,T] \cap \mathbb{Q}} |x(t) - x_0(t)|,$$

et un sup dénombrable de fonctions mesurables est mesurable.

En remplaçant les fonctions continues par les fonctions bornées, on a toujours $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}\left(L^\infty([0, T])\right)$, mais l'autre sens ne marche plus, notamment car les valeurs d'une fonction sur les rationnels ne déterminent plus la fonction. Pour montrer que $\mathcal{F} \neq \mathcal{B}\left(L^\infty([0, T])\right)$, on note $\mathcal{F}_{den}$ l'ensemble des $A \in \mathcal{B}\left(L^\infty([0, T])\right)$ qui ne dépendent que d'un nombre dénombrable de valeurs. Plus précisément, ce sont les A pour lesquels il existe une suite (t_n) telle que, si $x(t_n) = y(t_n)$ pour tout n, alors $x \in A \Leftrightarrow y \in A$. On vérifie que $\mathcal{F}_{den}$ est une tribu, et qu'elle rend mesurable les applications coordonnées. On a donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{den}$. Or, il est facile de vérifier que $\mathcal{F}_{den} \neq \mathcal{B}\left(L^\infty([0, T])\right)$. Par exemple, les ensembles $\{x | \sup_{t \in [0,T]} |x(t)| \leq 1\}$ ou $\{x \text{ continue}\}$ ne sont pas dans $\mathcal{F}_{den}$.

Exercice 9 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}([0, T])$ muni de la même tribu que ci-dessus. On suppose que pour tout $k \geq 1$ et tous $t_1, \ldots, t_k \in [0, T]$, les vecteurs

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) \qquad \text{et} \qquad (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_k})$$

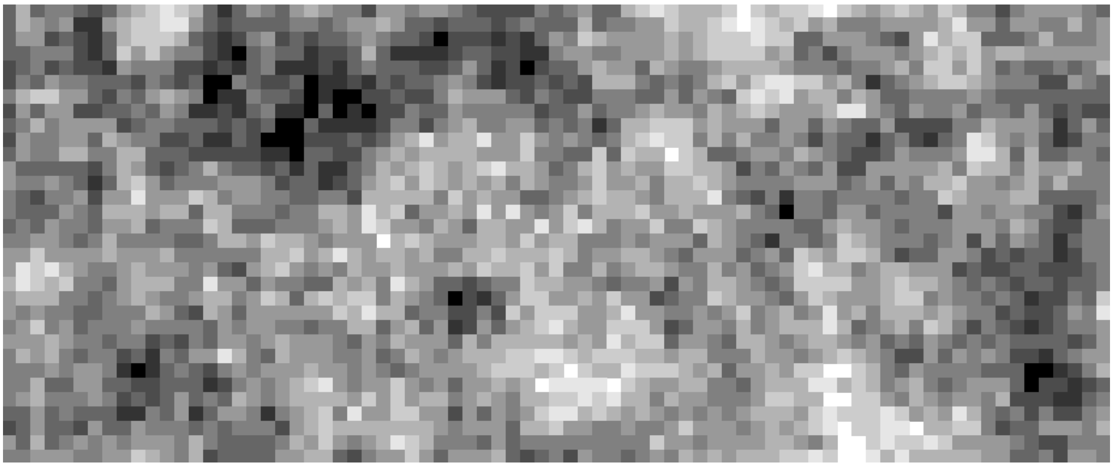
ont la même loi. Montrer que X et Y ont la même loi.

Solution de l'exercice 9

À chercher pour la semaine prochaine !

3 Jolie image

Exercice 10 Que représente la jolie image ci-dessous ?



Solution de l'exercice 10 Il s'agit d'un champ libre gaussien (Gaussian free field, ou GFF, en anglais), qui est l'analogue naturel d'une marche aléatoire indexée par un graphe quelconque (au lieu de $\mathbb{Z}$). Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un sommet distingué $0 \in V$, le champ libre gaussien $(h_x)_{x \in V}$ sur G est défini comme le vecteur aléatoire tel que $h_0 = 0$, et dont la loi a une densité

$$\frac{1}{Z_G} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\{x,y\} \in E} (h_x - h_y)^2 \right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{V \setminus \{0\}}$. Ici, le graphe G est un tore de dimension 2, de hauteur 32 et largeur 77. Chaque petit carré correspond donc à un sommet et plus h_x est grand, plus le carré correspondant à x est foncé. Pour une image encore plus jolie du même objet, voir par exemple ici :

`https://www.math.ucla.edu/~biskup/PIMS/JPGs/GFF.jpg`

Si on fixe la dimension et qu'on fait tendre la taille n du tore vers l'infini, cet objet a un comportement un peu surprenant :

- si $d = 1$, alors h ressemble à un mouvement Brownien, donc les h_x sont d'ordre $\sqrt{n}$,
- si $d = 2$, la plupart des h_x sont d'ordre $\sqrt{\log n}$, et les plus grands d'ordre $\log n$,
- si $d \geq 3$, la plupart des h_x sont d'ordre $O(1)$, et les plus grands d'ordre $\sqrt{\log n}$.