

TD 2 : Construction du mouvement brownien

Mercredi 20 Septembre

1 Comment identifier la loi d'un processus ?

Soit $T > 0$. On munit l'espace $\mathcal{C}([0, T])$ des fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathbb{R} de la norme infinie, et de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0, T]))$ associée à cette norme. On rappelle (TD de la semaine dernière, exercice 8) que la tribu borélienne est aussi la plus petite tribu sur $\mathcal{C}([0, T])$ qui rend mesurables les projections $x \rightarrow x_t$ pour tout $t \in [0, T]$.

Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}([0, T])$. On suppose que pour tout $k \geq 1$ et tous $t_1, \dots, t_k \in [0, T]$, les vecteurs

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}) \quad \text{et} \quad (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_k})$$

ont la même loi. Montrer que X et Y ont la même loi.

Exercice 2 En déduire que si X vérifie les trois conditions suivantes:

- (i) pour tous $t_1, \dots, t_k \geq 0$ le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ est un vecteur gaussien,
- (ii) pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{E}[X_t] = 0$,
- (iii) pour tous $s, t \geq 0$ on a $\mathbb{E}[X_s X_t] = \min(s, t)$,

alors X a la loi d'un mouvement brownien.

Remarque Dans la suite, on pourra admettre que les exercices 1 et 2 restent vrais en remplaçant $\mathcal{C}([0, T])$ par l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^d , ou par l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^d (muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et de la tribu borélienne associée). Ce n'est pas un résultat difficile, il suffit d'adapter l'exercice 6 du TD1 à ces cas.

2 Compléments sur la construction du mouvement brownien

Exercice 3 (Mouvement brownien sur \mathbb{R}^+) Soit $\left((B_t^n)_{t \in [0, 1]} \right)_{n \geq 0}$ une suite de mouvements browniens sur $[0, 1]$ indépendants. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$\left(B_t = \sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} B_1^n \right) + B_{t - \lfloor t \rfloor}.$$

Vérifier que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a bien

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \min(s, t).$$

Exercice 4 (Mouvement brownien d -dimensionnel) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère d mouvements browniens indépendants B^1, \dots, B^d et on pose $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit Q une matrice orthogonale. Montrer que $QB = (QB_t)_{0 \leq t \leq 1}$ a la même loi que B .

3 Mouvements browniens

Exercice 5 Soit B un mouvement brownien et $a > 0$. Montrer que les processus suivants sont des mouvements browniens :

- $X = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}B_{at}\right)_{t \geq 0}$,
- $Y = (tB_{1/t})_{t \geq 0}$,
- $Z = \left(B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s} ds\right)_{t \geq 0}$.

Exercice 6 Soit B un mouvement brownien, et soit $Z = \{t \in [0, 1] | B_t = 0\}$. Montrer que presque sûrement, Z est de mesure de Lebesgue nulle.

4 Processus de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On rappelle que le *processus de Poisson* $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ est défini par

$$N_t = \min\{n \in \mathbb{N} | X_0 + X_1 + \dots + X_n \geq t\},$$

où $(X_i)_{i \geq 0}$ est une suite de variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ , c'est à dire de loi $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x > 0} dx$. On rappelle également que la loi de Poisson de paramètre λ est définie par $\mathcal{P}_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 Montrer que pour tous s et t les variables N_t et $N_{s+t} - N_t$ sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}_{\lambda t}$ et $\mathcal{P}_{\lambda s}$.

Montrer que pour tous $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, les variables $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ pour $0 \leq i \leq k - 1$ sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}_{\lambda(t_{i+1}-t_i)}$.

Exercice 8 Soient $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 . Montrer que $N^{(1)} + N^{(2)}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

5 Jolie image

Exercice 9 Que représente la jolie image ci-dessous ?

