Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2017-2018 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 3 : Mouvement brownien, théorème de Donsker

Mercredi 27 Septembre

1 Utilisations du théorème de Donsker

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, et $M_n = \max\{X_k | 0 \leq k \leq n\}$.

1. Montrer que pour tous $a, n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(M_n \geq a, X_n < a) = \mathbb{P}(M_n \geq a, X_n > a)$.
2. En déduire une expression aussi simple que possible de la loi de M_n en fonction de celle de X_n.
3. Soit B un mouvement brownien et soit $S_t = \sup\{B_s | 0 \leq s \leq t\}$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que S_1 a la même loi que $|B_1|$.
4. En déduire que S_t a la même loi que $|B_t|$ pour tout $t \geq 0$, et que presque sûrement, $S_t > 0$ pour tout $t > 0$.
5. Est-il vrai que $(S_t)_{t\geq 0}$ a la même loi que $(|B_t|)_{t\geq 0}$?

<u>*Indication :*</u> L'outil à utiliser pour la première question se nomme "principe de réflexion".

Exercice 2

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, i.e. $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ où les Z_i sont i.i.d. et $\mathbb{P}(Z_i = -1) = \mathbb{P}(Z_i = +1) = \frac{1}{2}$. On note aussi $I_n = \min\{X_k | 0 \leq k \leq n\}$. Justifier que $(X_n - I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même loi que $\left(\left|X_n + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien. Pour tout t, on note $J_t = \inf\{B_s | 0 \leq s \leq t\}$. Déduire de la question précédente que $(B_t - J_t)_{0\leq t\leq 1}$ a la même loi que $(|B_t|)_{0\leq t\leq 1}$.
3. En déduire que l'ensemble des $t \in [0, 1]$ tels que $B_t = 0$ est presque sûrement indénombrable.

2 Autres exercices sur le mouvement brownien

Exercice 3 Soit B un mouvement brownien, et soit $\mathcal{Z} = \{t \in [0, 1] | B_t = 0\}$. Montrer que presque sûrement, $\mathcal{Z}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 4 Montrer que $\int_0^{+\infty} |B_t| \,\mathrm{d}t = +\infty$ presque sûrement.

Exercice 5 (Le mouvement brownien n'est pas à variation finie)
Soient $0 \leq a < b$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(B_{a+(k+1)(b-a)2^{-n}} - B_{a+k(b-a)2^{-n}}\right)^2 .$$

1. Calculer la moyenne et la variance de X_n.
2. En déduire que X_n converge p.s. vers une limite à préciser.
3. En conclure que p.s., le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial.

On rappelle qu'une fonction f est à variation finie sur l'intervalle $[a, b]$ si les sommes

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

sont bornées indépendamment de k et de la subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$.

3 Jolie image

Exercice 6 Que représente la jolie image ci-dessous ?