Processus aléatoires
ENS Paris, 2017-2018

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 3 : Mouvement brownien, théorème de Donsker
Corrigé

Mercredi 27 Septembre

1 Utilisations du théorème de Donsker

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, et $M_n = \max\{X_k | 0 \leq k \leq n\}$.

1. Montrer que pour tous $a, n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(M_n \geq a, X_n < a) = \mathbb{P}(M_n \geq a, X_n > a)$.
2. En déduire une expression aussi simple que possible de la loi de M_n en fonction de celle de X_n.
3. Soit B un mouvement brownien et soit $S_t = \sup\{B_s | 0 \leq s \leq t\}$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que S_1 a la même loi que $|B_1|$.
4. En déduire que S_t a la même loi que $|B_t|$ pour tout $t \geq 0$, et que presque sûrement, $S_t > 0$ pour tout $t > 0$.
5. Est-il vrai que $(S_t)_{t\geq 0}$ a la même loi que $(|B_t|)_{t\geq 0}$?

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. On appelle trajectoire *de type I* une trajectoire de marche aléatoire de longueur n qui atteint a et qui termine (strictement) en-dessous, et trajectoire *de type II* une trajectoire qui atteint a et termine (strictement) au-dessus. Il suffit de montrer qu'il y a autant de trajectoires de type I que de type II, ce qu'on va faire en construisant une bijection entre les deux. Soit t une trajectoire de type I, et k le premier instant où elle atteint a. On note t' la trajectoire t, réfléchie à partir du temps k par rapport à la droite d'équation $y = a$ (cf. Figure). Il est facile de vérifier que t' est de type II, et que la transformation décrite est involutive donc bijective, ce qui permet de conclure.
2. Pour tout $a \geq 1$, en utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n \geq a) &= \mathbb{P}(M_n \geq a, X_n \geq a) + \mathbb{P}(M_n \geq a, X_n < a) \\ &= \mathbb{P}(X_n \geq a) + \mathbb{P}(X_n > a) \\ &= 2\mathbb{P}(X_n \geq a) - \mathbb{P}(X_n = a) \\ &= \mathbb{P}(|X_n| \geq a) - \mathbb{P}(X_n = a). \end{aligned}$$

   On en déduit $\mathbb{P}(M_n = a) = \mathbb{P}(|X_n| = a) - \mathbb{P}(X_n = a) + \mathbb{P}(X_n = a+1)$ pour $a \geq 1$, et $\mathbb{P}(M_n = 0) = \mathbb{P}(|X_n| = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1)$.
3. Soit $u \in \mathbb{R}$ et $f(x) = e^{iux}$. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}[f(S_1)] = \mathbb{E}[f(|B_1|)]$. Or, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sup_{s\in[0,1]} x_s \end{aligned}$$

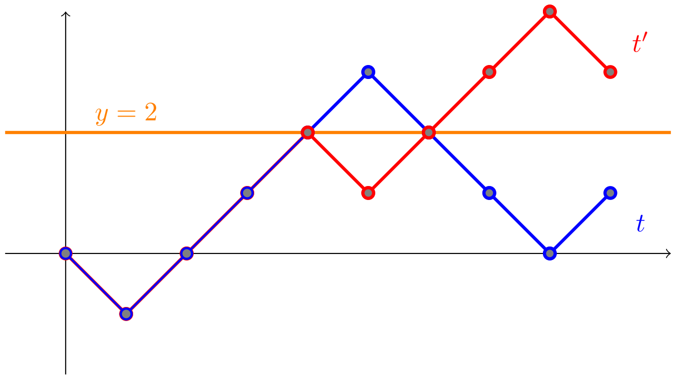


Figure 1 – Réflexion décrite dans la question 1 avec $a = 2$.

est continue pour la norme uniforme (car 1-lipschitzienne), donc d'après le théorème de Donsker puis la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f\left(S_1\right)\right] &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{a\geq 0} \mathbb{P}\left(M_n = a\right) f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{a\geq 0} \mathbb{P}\left(|X_n| = a\right) f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right) + \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) f(0) + \sum_{a\geq 1} \left(\mathbb{P}\left(X_n = a+1\right) - \mathbb{P}\left(X_n = a\right)\right) f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{E}\left[f\left(\frac{|X_n|}{\sqrt{n}}\right)\right] + \sum_{a\geq 1} \mathbb{P}\left(X_n = a\right)\left(f\left(\frac{a-1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left[f\left(|B_1|\right)\right] + \lim_{n\to+\infty} \sum_{a\geq 1} \mathbb{P}\left(X_n = a\right)\left(f\left(\frac{a-1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right).
\end{aligned}$$

On peut alors conclure car

$$\begin{aligned}
\sum_{a\geq 1} \mathbb{P}\left(X_n = a\right)\left|f\left(\frac{a-1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right| &\leq \sum_{a\geq 1} \mathbb{P}\left(X_n = a\right)\frac{|u|}{\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{|u|}{\sqrt{n}} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

4. Il suffit d'utiliser l'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle (exo 5 du TD 2) : S_t a la même loi que $\sqrt{t}S_1$, qui a la même loi que $\sqrt{t}|B_1|$ (d'après la question précédente), qui a la même loi que $|B_t|$. On en déduit que pour tout t, on a $S_t > 0$ p.s.. Par conséquent, p.s., on a $S_t > 0$ pour tout $t > 0$ rationnel, donc pour tout $t > 0$ car S est croissante. De manière similaire, p.s., on a $\inf_{[0,t]} B_t < 0$ pour tout $t > 0$. En particulier, B change de signe une infinité de fois au voisinage de 0.
5. Non. Par exemple $(S_t)_{t\geq 0}$ est p.s. croissant mais pas $(|B_t|)_{t\geq 0}$.

Remarque La question 3 peut aussi se traiter plus rapidement en passant par les fonctions de répartition. On sait que la loi de $|B_1|$ n'a pas d'atome, donc la fonction de répartition de $\frac{|X_n|}{\sqrt{n}}$ converge simplement vers celle de $|B_1|$. D'autre part, on vérifie grâce à notre calcul de $\mathbb{P}\left(M_n \geq a\right)$ que la différence entre les fonctions de répartitions de $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$ et $\frac{|X_n|}{\sqrt{n}}$ tend vers 0, donc la fonction de répartition de $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$ tend vers celle de $|B_1|$, donc $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $|B_1|$ mais aussi vers S_1, donc $|B_1|$ et S_1 ont la même loi.

Exercice 2

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, i.e. $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ où les Z_i sont i.i.d. et $\mathbb{P}(Z_i=-1)=\mathbb{P}(Z_i=+1)=\frac{1}{2}$. On note aussi $I_n=\min\{X_k | 0\le k\le n\}$. Justifier que $(X_n-I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même loi que $\left(\left|X_n+\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $(B_t)_{0\le t\le 1}$ un mouvement brownien. Pour tout t, on note $J_t=\inf\{B_s | 0\le s\le t\}$. Déduire de la question précédente que $(B_t-J_t)_{0\le t\le 1}$ a la même loi que $(|B_t|)_{0\le t\le 1}$.
3. En déduire que l'ensemble des $t\in[0,1]$ tels que $B_t=0$ est presque sûrement indénombrable.

Solution de l'exercice 2

1. Tant que $X_n-I_n>0$, on a $X_n>I_n$ donc $I_{n+1}=I_n$ et X_n-I_n évolue comme une marche aléatoire, c'est-à-dire que $X_{n+1}-I_{n+1}$ vaut $(X_n-I_n)+1$ avec proba $\frac{1}{2}$ et $(X_n-I_n)-1$ avec proba $\frac{1}{2}$. Si $X_n-I_n=0$, alors $X_n=I_n$, donc avec proba $\frac{1}{2}$ on a $X_{n+1}=X_n-1$, d'où $I_{n+1}=I_n-1$ et $X_{n+1}-I_{n+1}=X_n-I_n$, et avec proba $\frac{1}{2}$ on a $X_{n+1}=X_n+1$ donc $I_{n+1}=I_n$ et $X_{n+1}-I_{n+1}=(X_n-I_n)+1$. Le processus (X_n-I_n) évolue donc comme une marche aléatoire, sauf en 0 où il a une chance sur deux de rester en 0 et une chance sur deux de passer à 1.

   De même, si $\left|X_n+\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\neq 0$, alors $X_n\neq -1,0$ et $\left|X_n+\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}$ va augmenter de 1 avec proba $\frac{1}{2}$, et diminuer de 1 avec proba $\frac{1}{2}$. Si $\left|X_n+\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}=0$, alors X_n vaut 0 ou -1. Si par exemple $X_n=0$, alors avec proba $\frac{1}{2}$ on a $X_{n+1}=-1$, auquel cas $\left|X_{n+1}+\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}=0$, et avec proba $\frac{1}{2}$ on a $X_{n+1}=1$, auquel cas $\left|X_{n+1}+\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}=1$. Le cas $X_n=-1$ se traite similairement. Les deux processus ont donc la même loi.

   La démonstration ci-dessus n'est pas totalement rigoureuse. Une manière de l'écrire rigoureusement est de décrire $\mathbb{P}(X_1-I_1=i_1,\dots,X_n-I_n=i_n)$ pour tous entiers $i_1,\dots,i_n$ et de même pour le second processus, ce qui est un peu lourd à rédiger. Une seconde manière est de dire que d'après la discussion ci-dessus, $(X_n-I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\left|X_n+\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux chaînes de Markov avec les mêmes probabilités de transitions et ont donc la même loi (cf. plus tard dans le cours).
2. D'après la première question, pour tout n, les processus $\left(\frac{X_{\lfloor nt\rfloor}-I_{\lfloor nt\rfloor}}{\sqrt{n}}\right)_{0\le t\le 1}$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left|X_{\lfloor nt\rfloor}+\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right)\right)_{0\le t\le 1}$ ont la même loi. Quand $n\to+\infty$, d'après le théorème de Donsker et la continuité (pour la norme uniforme) de l'application (elle est en fait 2-lipschitzienne)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1]) \\ x & \longrightarrow & \left(x_t-\inf\limits_{[0,s]} x_s\right)_{0\le t\le 1} \end{array},$$

   le premier processus converge vers $(B_t-J_t)_{0\le t\le 1}$. Il suffit donc de montrer que le second converge vers $(|B_t|)_{0\le t\le 1}$. Or, d'après le théorème de Donsker et la continuité de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1]) \\ x & \longrightarrow & (|x_t|)_{0\le t\le 1} \end{array},$$

   on a $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|X_{\lfloor nt\rfloor}\right|\right)_{0\le t\le 1}\to(|B_t|)_{0\le t\le 1}$. On a de plus

$$\begin{array}{rcl} \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left|X_{\lfloor nt\rfloor}+\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right)\right)_{0\le t\le 1}-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|X_{\lfloor nt\rfloor}\right|\right)_{0\le t\le 1}\right\|_\infty & \le & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & 0. \end{array}$$

   Le processus qui nous intéresse est donc la somme d'un processus qui converge en loi vers $(|B_t|)_{0\le t\le 1}$ et d'un processus qui converge en loi vers 0. On peut donc conclure par le lemme de Slutsky.

3. D'après la question précédente, les sous-ensembles aléatoires $\{t|B_t = 0\}$ et $\{t|B_t = J_t\}$ de $[0,1]$ ont la même loi, donc il suffit de montrer que le second est p.s. indénombrable. Or, d'après la question 4 de l'exercice 1, quitte à remplacer B par $-B$, on a $J_1 < 0$. Pour tout $x \in]J_1, 0[$, on note $\tau_x = \inf\{t \in [0,1] | B_t = x\}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tous ces τ_x sont bien définis. Ils sont de plus tous distincts et forment un ensemble indénombrable. De plus, on a $B_{\tau_x} = J_{\tau_x}$ pour tout x (toujours grâce au TVI), ce qui permet de conclure.

2 Autres exercices sur le mouvement brownien

Exercice 3 Soit B un mouvement brownien, et soit $\mathcal{Z} = \{t \in [0,1] | B_t = 0\}$. Montrer que presque sûrement, $\mathcal{Z}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Solution de l'exercice 3 Tout d'abord, remarquons que presque sûrement, B est continu donc $\mathcal{Z}$ est fermé, donc mesurable. On note λ la mesure de Lebesgue. Pour montrer $\lambda(\mathcal{Z}) = 0$, on utilise le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\lambda(\mathcal{Z})] &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \mathbb{1}_{B_t=0}\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_t=0}]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \mathbb{P}(B_t = 0)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

car pour tout $t > 0$, la variable B_t est une gaussienne de variance non nulle donc $\mathbb{P}(B_t = 0) = 0$. On en déduit $\lambda(\mathcal{Z}) = 0$ p.s..

Exercice 4 Montrer que $\int_0^{+\infty} |B_t|\,\mathrm{d}t = +\infty$ presque sûrement.

Solution de l'exercice 4 Il y a plusieurs manières de résoudre cet exercice. Une possibilité est de montrer que comme $\mathbb{P}(|B_t| < 1) \longrightarrow 0$ quand $t \to +\infty$, on a $|B_t| \geq 1$ la plupart du temps. Plus précisément, on a $|B_t| \geq \mathbb{1}_{|B_t| \geq 1}$ pour tout t, donc il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{|B_t|\geq 1}\,\mathrm{d}t = +\infty$ p.s. Il suffit donc de montrer que pour tous c et $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{|B_t|\geq 1}\,\mathrm{d}t \leq c\right) \leq \varepsilon$. Soient donc $c, \varepsilon > 0$. Il existe a tel que pour $t \geq a$, on a $\mathbb{P}(|B_t| < 1) \leq \varepsilon$ (par exemple en écrivant la densité de B_t), donc pour tout $b > 0$, en utilisant Fubini :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_a^{a+b} \mathbb{1}_{|B_t|<1}\mathrm{d}t\right] &= \int_a^{a+b} \mathbb{P}(|B_t| < 1)\,\mathrm{d}t \\ &\leq b\varepsilon \end{aligned}$$

donc, pour tout $b > c$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{|B_t|\geq 1}\,\mathrm{d}t \leq c\right) &\leq \mathbb{P}\left(\int_a^{a+b} \mathbb{1}_{|B_t|\geq 1}\,\mathrm{d}t \leq c\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\int_a^{a+b} \mathbb{1}_{|B_t|<1}\,\mathrm{d}t \geq b - c\right) \\ &\leq \frac{b\varepsilon}{b-c} \\ &\xrightarrow[b\to+\infty]{} \varepsilon, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Markov à l'avant-dernière ligne.

Remarque Il est également possible de résoudre cet exercice en utilisant l'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle. En effet, pour tout $a > 0$, les variables

$$\int_0^1 |B_t| \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a}} |B_{at}| \, \mathrm{d}t$$

ont la même loi, donc

$$\int_0^a |B_t| \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad a^{3/2} \int_0^1 |B_t| \, \mathrm{d}t$$

ont la même loi. Quand $a \to +\infty$, la première variable tend vers $\int_0^{+\infty}$, tandis que la seconde tend vers $+\infty$ si $\int_0^1 |B_t| \, \mathrm{d}t > 0$, ce qui est vrai p.s.

On rappelle qu'une fonction f est à variation finie sur l'intervalle $[a, b]$ si les sommes

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

sont bornées indépendamment de k et de la subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$.

Exercice 5 (Le mouvement brownien n'est pas à variation finie)
Soient $0 \leq a < b$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

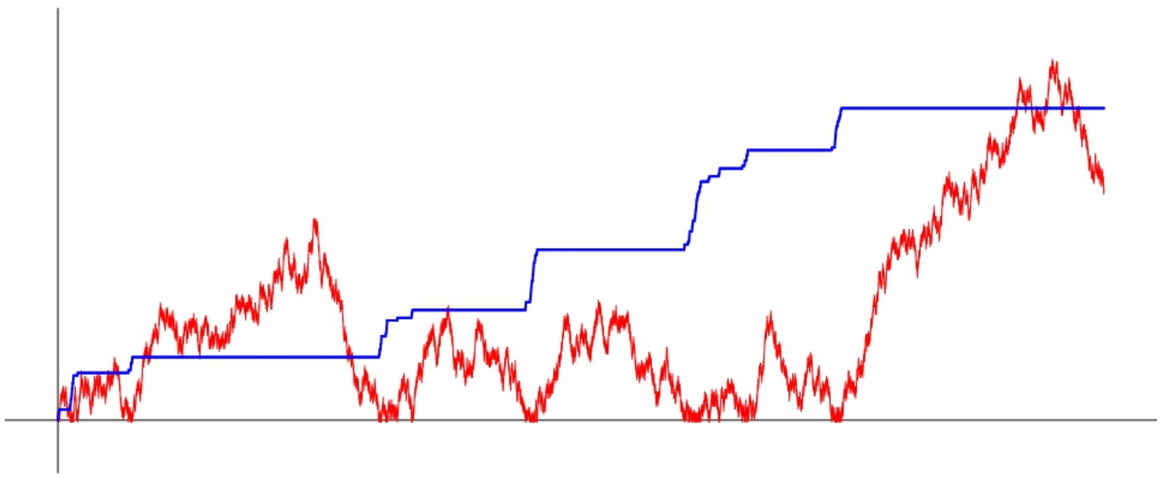
$$X_n = \sum_{k=0}^{2^n - 1} \left(B_{a+(k+1)(b-a)2^{-n}} - B_{a+k(b-a)2^{-n}} \right)^2 .$$

1. Calculer la moyenne et la variance de X_n.
2. En déduire que X_n converge p.s. vers une limite à préciser.
3. En conclure que p.s., le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Attendre la semaine prochaine.

3 Jolie image

Exercice 6 Que représente la jolie image ci-dessous ?



Solution de l'exercice 6 Il s'agit d'une illustration de l'exercice 2 : en bleu, le processus $(-J_t)_{t\geq 0}$, où $J_t = \inf_{[0,t]} B$, et en rouge le processus $(B_t - J_t)_{t\geq 0}$, qui a la même loi que $(|B_t|)_{t\geq 0}$.

Notons que le processus bleu a une autre interprétation sympathique : il "compte" le temps que le processus rouge passe en 0. En effet, il est croissant, et constant sur tout intervalle où le processus rouge ne tape pas 0. Plus précisément, si β est un mouvement brownien, on peut supposer qu'il existe un mouvement brownien B tel que $|\beta_t| = B_t - J_t$ pour tout $t \geq 0$, et dans ce cas $-J_t$ permet de mesurer le temps que β a passé en 0. Le processus bleu $-J$ est appelé *temps local en* 0 de β, et on peut par exemple montrer que pour tout t, on a

$$-J_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{\beta_t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \mathrm{d}t.$$

Notons enfin que la construction d'un tel processus n'est pas évidente. On a vu que l'ensemble des points où β s'annule est un fermé indénombrable mais de mesure nulle, donc il n'y a pas de manière évidente de "mesurer" sa taille.