Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2017-2018 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 4 : Vous reprendrez bien du brownien ?
Corrigé

Mercredi 4 Octobre

Exercice 1 (Loi du logarithme itéré pour le mouvement brownien)
Soit B un mouvement brownien. Le but de cet exercice est de montrer que presque sûrement :

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1,$$

avec $h(t) = \sqrt{2t \ln \ln t}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $S_t = \sup_{s\in[0,t]} B_s$, et on rappelle (TD3, exo 1) que S_t a la même loi que $|B_t|$. On rappelle également (TD1, exo 4) que $\mathbb{P}(B_1 > x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$ quand $x \to +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Estimer
$$\mathbb{P}\left(S_{(1+\varepsilon)^n} > (1+\varepsilon)h\left((1+\varepsilon)^n\right)\right)$$
pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire $\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} \leq 1$ p.s..
3. Soit $r > 1$. Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} h(r^n)$.
4. En déduire $\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1$ p.s.. Que peut-on en déduire sur le comportement de B au voisinage de 0 ?

Solution de l'exercice 1

1. On utilise successivement le premier rappel, le fait que B_t a la même loi que $\sqrt{t}B_1$, et le second rappel :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_{(1+\varepsilon)^n} > (1+\varepsilon)h\left((1+\varepsilon)^n\right)\right) &= \mathbb{P}\left(|B_{(1+\varepsilon)^n}| > (1+\varepsilon)\sqrt{2(1+\varepsilon)^n \ln\ln(1+\varepsilon)^n}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|B_1| > (1+\varepsilon)\sqrt{2\left(\ln n + \ln\ln(1+\varepsilon)\right)}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+\varepsilon)\sqrt{\ln n}} e^{-(1+\varepsilon)^2(\ln n + \ln\ln(1+\varepsilon))} \\
&= O\left(\frac{1}{n^{(1+\varepsilon)^2}}\right).
\end{aligned}$$
2. D'après Borel-Cantelli, on a donc $S_{(1+\varepsilon)^n} \leq (1+\varepsilon)h\left((1+\varepsilon)^n\right)$ pour n assez grand. Soit donc $t > 1$, et soit n tel que $(1+\varepsilon)^{n-1} \leq t < (1+\varepsilon)^n$. Si t est assez grand, alors
$$S_t \leq S_{(1+\varepsilon)^n} \leq (1+\varepsilon)\, h\left((1+\varepsilon)^n\right) \leq (1+\varepsilon)\, h\left((1+\varepsilon)t\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} (1+\varepsilon)^{3/2} h(t).$$
On en déduit $\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} \leq (1+\varepsilon)^{3/2}$ p.s.. Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient la borne supérieure voulue.

3. On raisonne de manière similaire :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} h(r^n)\right) &= \mathbb{P}\left(B_{(r-1)r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} \sqrt{2r^n \ln \ln r^n}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(B_1 \geq \sqrt{2(\ln n + \ln \ln r)}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\ln n}} \frac{1}{n \ln r}.
\end{aligned}
$$

Comme $\sum_n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ diverge et les événements $\left\{B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} h(r^n)\right\}$ sont indépendants (par indépendance des incréments de B), on peut conclure par Borel-Cantelli.

4. D'après la question 2, pour n assez grand on a $B_{r^{n-1}} \geq -2h\left(r^{n-1}\right)$. En combinant cette observation avec la question 3, il existe une infinité de n tels que

$$
\begin{aligned}
B_{r^n} &\geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} h\left(r^n\right) - 2h\left(r^{n-1}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\sqrt{\frac{r-1}{r}} - \frac{2}{r}\right) h\left(r^n\right).
\end{aligned}
$$

On a donc $\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} - \frac{2}{r}$ p.s., et ce pour tout $r > 1$, d'où le résultat en faisant tendre r vers $+\infty$. Pour en déduire une information au voisinage de 0, on utilise l'invariance du mouvement brownien par inversion du temps. On sait (TD2, exo 5) que $(tB_{1/t})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, donc

$$
\limsup_{t\to+\infty} \frac{tB_{1/t}}{h(t)} = 1,
$$

donc

$$
\limsup_{s\to 0} \frac{B_s}{s\, h(1/s)} = 1
$$

p.s., avec $s\, h(1/s) = \sqrt{2s \ln(-\ln s)}$.

Exercice 2 (Le mouvement brownien n'est pas à variation finie)
Soient $0 \leq a < b$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$
X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(B_{a+(k+1)(b-a)2^{-n}} - B_{a+k(b-a)2^{-n}}\right)^2.
$$

1. Calculer la moyenne et la variance de X_n.
2. En déduire que X_n converge p.s. vers une limite à préciser.
3. En conclure que p.s., le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

1. Pour tout $0 \leq k \leq 2^n - 1$, on pose $Y_{n,k} = B_{a+(k+1)(b-a)2^{-n}} - B_{a+k(b-a)2^{-n}}$. On sait que les variables $Y_{n,k}$ pour $0 \leq k \leq 2^n - 1$ sont des gaussiennes centrées indépendantes de variance $(b-a)2^{-n}$. On en déduit

$$
\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[Y_{n,k}^2\right] = \sum_{k=0}^{2^n-1} (b-a)2^{-n} = b - a.
$$

On obtient aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_n^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} Y_{n,k}^2\right)^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[Y_{n,k}^4\right] + 2 \sum_{0\le k<l\le 2^n-1} \mathbb{E}\left[Y_{n,k}^2\right]\mathbb{E}\left[Y_{n,\ell}^2\right] \\
&= 3(b-a)^2 2^{-n} + 2\frac{2^n(2^n-1)}{2}(b-a)^2 2^{-2n} \\
&= (b-a)^2(1+2^{1-n}),
\end{aligned}$$

en utilisant à la fin $\mathbb{E}\left[Y^4\right] = 3\sigma^4$ si Y est une gaussienne de variance σ^2 (cela se recalcule facilement par intégration par partie). On obtient donc

$$\mathrm{Var}(X_n) = (b-a)^2 2^{1-n}.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{P}\left(|X_n - (b-a)| > \varepsilon\right) \le \frac{\mathbb{E}\left[|X_n-(b-a)|^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{(b-a)^2}{2^{n-1}\varepsilon^2}.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., on a donc $|X_n - (b-a)| \le \varepsilon$ pour n assez grand. Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} b-a.$$

3. On a

$$X_n \le \sup_{0\le k\le 2^n-1} \left|B_{a+(b-a)(k+1)2^{-n}} - B_{a+(b-a)k2^{-n}}\right| \times \sum_{k=0}^{2^n-1} \left|B_{a+(k+1)(b-a)2^{-n}} - B_{a+k(b-a)2^{-n}}\right|.$$

Par continuité uniforme du mouvement brownien sur $[a,b]$, le premier facteur tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Comme X_n converge vers $b-a > 0$, le second facteur tend donc p.s. vers $+\infty$, donc p.s. B n'est pas à variation finie sur $[a,b]$. On en déduit que p.s., pour tous $0 \le a < b$ avec a et b rationnels, B n'est pas à variation finie sur $[a,b]$. Comme tout intervalle contient un intervalle à extrémités rationnelles, on en déduit donc que p.s., pour tous $0 \le a < b$, le mouvement brownien n'est pas à variation finie sur $[a,b]$.

Remarque Supposons que le cours d'une action en bourse suive un mouvement brownien. Alors cet exercice montre que si on connaît à l'avance le mouvement brownien, il est possible, en achetant et vendant ses actions aux bons moments, de gagner (ou de perdre !) des sommes arbitrairement grandes en un temps arbitrairement petit !

Exercice 3 (À ε près, le mouvement brownien peut tout faire !)

1. Soit $\varepsilon > 0$, et soit B un mouvement brownien. En utilisant la séparabilité de $\mathcal{C}([0,1])$, montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que
$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |B_t - f(t)| \le \varepsilon\right) > 0.$$

2. En déduire que
$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |B_t| \le \varepsilon\right) > 0.$$

3. Soit X une gaussienne de variance 1 indépendante de B. Montrer que $(B_t - tB_1 + tX)_{0\le t\le 1}$ est un mouvement brownien. En déduire que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |B_t - \alpha t| \le \varepsilon\right) > 0.$$

4. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on a

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |B_t - f(t)| \leq \varepsilon\right) > 0.$$

5. Montrer qu'il existe des constantes $C, c > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |B_t| \leq \varepsilon\right) \leq C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon^2}\right).$$

Solution de l'exercice 3

1. Soit $(f_i)_{i \geq 0}$ une famille dense dans $\mathcal{C}([0,1])$. En particulier, les boules centrées en les f_i de rayon ε recouvrent $\mathcal{C}([0,1])$, donc

$$\sum_{i \geq 0} \mathbb{P}\left(\|B - f_i\|_\infty \leq \varepsilon\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \geq 0} \{\|B - f_i\|_\infty \leq \varepsilon\}\right) = 1.$$

En particulier, il existe i tel que $\mathbb{P}\left(\|B - f_i\|_\infty \leq \varepsilon\right) > 0$.

2. Soient B et B' deux mouvements browniens indépendants, et soit f donnée par la question précédente. On a

$$\mathbb{P}\left(\|B - f\|_\infty \leq \varepsilon, \|B' - f\|_\infty \leq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\|B - f\|_\infty \leq \varepsilon\right)^2 > 0.$$

Or, si cet événement se produit, alors $\|B - B'\|_\infty \leq 2\varepsilon$, d'où $\mathbb{P}\left(\|\frac{B-B'}{\sqrt{2}}\|_\infty \leq \sqrt{2}\varepsilon\right) > 0$. Pour conclure, il suffit de vérifier que $\frac{B-B'}{\sqrt{2}}$ est un mouvement brownien. On vérifie facilement que c'est bien un processus gaussien (car somme de deux processus gaussiens indépendants) continu et centré. De plus, pour tous s et t, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{B_s - B'_s}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{B_t - B'_t}{\sqrt{2}}\right)\right] &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[B_s B_t\right] - \left[B_s B'_t\right] - \left[B'_s B_t\right] + \left[B'_s B'_t\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\min(s,t) - 0 - 0 + \min(s,t)\right) \\
&= \min(s,t),
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

3. Le processus $\widetilde{B}$ considéré est continu, gaussien et centré, donc il suffit de calculer ses covariances. Soient $s, t \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(B_s - sB_1 + sX)(B_t - tB_1 + tX)\right] &= \min(s,t) - st + 0 - st + st + 0 + 0 + 0 + st \\
&= \min(s,t).
\end{aligned}$$

D'après la première question et l'indépendance de B et X, on a

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |B_t| \leq \varepsilon \text{ et } |X - \alpha| \leq \varepsilon\right) > 0.$$

Or, si cela se produit, alors $|\widetilde{B}_t - \alpha t| \leq 3\varepsilon$ pour tout t, donc

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |B_t - \alpha t| \leq 3\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |\widetilde{B}_t - \alpha t| \leq 3\varepsilon\right) > 0,$$

ce qui conclut.

4. On considère une approximation de f affine par morceaux. Plus précisément, il existe des réels $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ et une fonction $\widetilde{f}$ telle que $\widetilde{f}$ est affine sur tous les intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ et $\|f - \widetilde{f}\|_\infty \leq \varepsilon$. Pour tout $0 \leq i \leq k-1$, on note B^i le processus $(B_{t+t_i} - B_{t_i})_{0 \leq t \leq t_{i+1} - t_i}$, et $f^i(t) = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} t$ pour tout $t \in [0, t_{i+1} - t_i$. Par indépendance des incréments, les processus B^i

sont des mouvement browniens indépendants (de durées différentes). D'après la question précédente, on a donc

$$\mathbb{P}\left(\forall i \in \{0,1,\ldots,k-1\}, \|B^i - f^i\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{k}\right) = \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}\left(\|B^i - f^i\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{k}\right) > 0.$$

Or, il est facile de vérifier que si cela se produit, alors $\|B - f\|_\infty \le \varepsilon$.

5. Ici, on peut se permettre des majorations assez brutales. En utilisant l'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\forall t \in [0,1], |B_t| \le \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(\forall t \in [0, 1/\varepsilon^2], |B_t| \le 1\right) \\
&\le \mathbb{P}\left(\forall k \in \{1,2,\ldots,\lfloor 1/\varepsilon^2 \rfloor\}, |B_k| \le 1\right) \\
&\le \mathbb{P}\left(\forall k \in \{0,1,\ldots,\lfloor 1/\varepsilon^2 \rfloor - 1\}, |B_{k+1} - B_k| \le 2\right) \\
&= \mathbb{P}(|B_1| \le 2)^{\lfloor 1/\varepsilon^2 \rfloor}
\end{aligned}$$

en utilisant à la fin l'indépendance des incréments. Comme $\mathbb{P}(|B_1| \le 2) < 1$, on peut conclure.

Remarque En utilisant une variante continue du principe de réflexion, il est même possible de faire un calcul exact :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\forall t \in [0,1], |B_t| \le \varepsilon) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n \ge 1} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{8\varepsilon^2}\right) \\
&\underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \frac{4}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2}{8\varepsilon^2}\right).
\end{aligned}$$

Pour une preuve (en admettant quelques trucs, et pas avec tous les détails), voir ce lien.

Exercice 4 (Les maxima locaux du mouvement brownien sont distincts)
Soit B un mouvement brownien.

1. Soient $a < b < c < d$ des réels. On pose $M_1 = \max_{[a,b]} B$ et $M_2 = \max_{[c,d]} B$. Montrer que les variables $M_1 - B_b$, $B_c - B_b$ et $M_2 - B_c$ sont indépendantes.
2. Montrer que si X et Y sont deux variables indépendantes et si la loi de X n'a pas d'atome, alors $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.
3. En déduire que $M_1 \ne M_2$ p.s. puis que p.s., les maxima locaux de B sont deux à deux distincts.

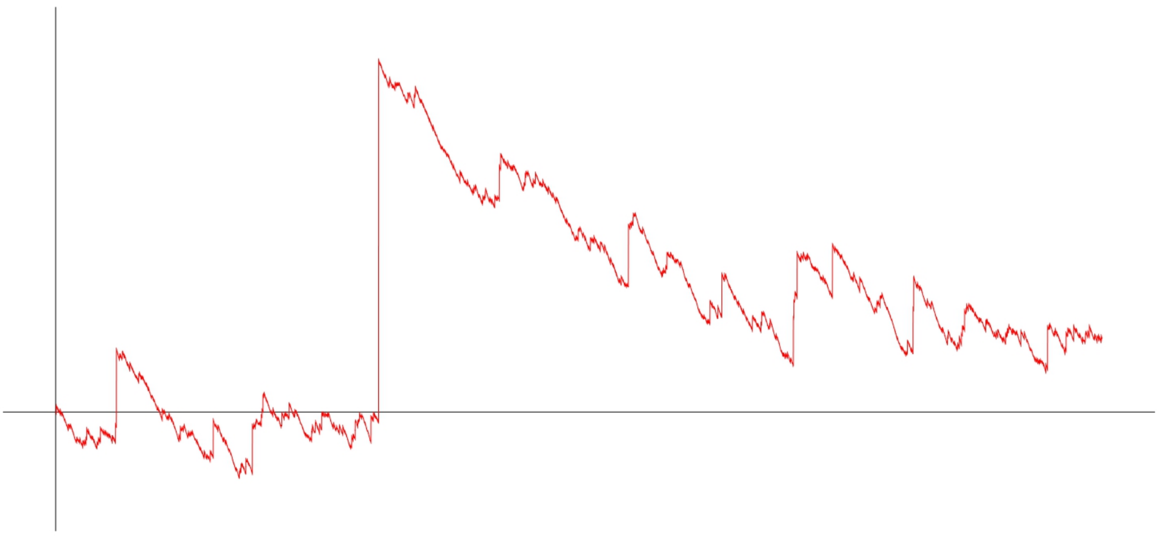
Solution de l'exercice 4

1. Par indépendance des incréments, les trois processus suivants sont indépendants :
   — $(B_t)_{0 \le t \le b}$,
   — $(B_t - B_b)_{b \le t \le c}$,
   — $(B_t - B_c)_{c \le t \le d}$.
   Or, $M_1 - B_b$ est une fonction mesurable du premier, $B_c - B_b$ une fonction mesurable du second et $M_2 - B_c$ une fonction mesurable du troisième. De plus, la loi de $B_c - B_b$ est une gaussienne de variance $c - b$. En particulier, elle n'a pas d'atome.
2. La loi de (X, Y) est la mesure produit des lois de X et Y, donc

$$\mathbb{P}(X = Y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x=y} \, P_X(\mathrm{d}x) P_Y(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}} 0 \, P_Y(\mathrm{d}y) = 0.$$

3. Si $M_1 = M_2$, alors $B_c - B_b = (M_1 - B_b) - (M_2 - B_c)$, alors que les deux membres sont indépendants. D'après la question précédente, ce n'est pas le cas p.s..
   Par conséquent, presque sûrement, pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $0 \le a < b < c < d$, les maxima de B sur $[a, b]$ et $[c, d]$ sont distincts. Or, si B admet un maximum local en x et y avec $x < y$, alors il existe de tels rationnels tels que $x \in [a, b]$ et $y \in [c, d]$, ce qui permet de conclure.

Exercice 5 Que représente la jolie image ci-dessous ?



<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Il s'agit d'un processus de Lévy L stable d'indice $3/2$. C'est un exemple de processus à accroissements stationnaires et indépendants, différent du mouvement brownien. Il n'est donc pas continu. Ce processus possède aussi une propriété d'invariance par changement d'échelle similaire à celle du mouvement brownien, mais avec un exposant différent : pour tout $a > 0$, les processus

$$\left(a^{-2/3} L_{at}\right)_{t\geq 0} \quad \text{et} \quad (L_t)_{t\geq 0}$$

ont la même loi. Le processus présenté ci-dessus a également la propriété de n'avoir que des sauts positifs.

Cet objet apparaît également quand on supprime l'hypothèse "la loi des pas a une variance finie" dans le théorème de Donsker. En particulier, soit X est une variable aléatoire vérifiant les propriétés suivantes :

— $\mathbb{E}\,[X] = 0$,

— $\mathbb{E}\left[X^2 \mathbb{1}_{X<0}\right]$,

— $\mathbb{P}\,(X \geq a) \sim a^{-3/2}$ quand $a \to +\infty$, de sorte que $\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{X>0}] = +\infty$.

Soit S une marche aléatoire dont les pas ont la loi de X. Alors S_n est d'ordre $n^{2/3}$ et, si on la normalise par $n^{2/3}$ (comme dans le théorème de Donsker mais en changeant l'exposant), elle converge vers le processus de Lévy ci-dessus. Le fait que le processus limite ne soit pas continu signifie qu'il arrive qu'un pas $S_{n+1} - S_n$ soit du même ordre de grandeur que S_n !