Processus aléatoires
ENS Paris, 2017-2018

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 6 : Espérance conditionnelle dans L^2, lois conditionnelles
Corrigé

Mercredi 18 Octobre

1 Espérance conditionnelle dans L^2

Exercice 1
On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s..
2. On se place maintenant dans le cas général. Montrer que $X = Y$ en remarquant que, pour tout $a \geq 0$, on a
$$\mathbb{E}\left[X \mathbb{1}_{X \leq a}\right] = \mathbb{E}\left[Y \mathbb{1}_{X \leq a}\right].$$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. On calcule
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}\left[Y^2\right] - 2E\left[XY\right].$$
Or $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{E}[Y|X]\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right]$ et de même $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[Y^2\right]$, donc $\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = 0$ et $X = Y$ p.s..
On peut aussi le voir autrement en utilisant l'interprétation de l'espérance conditionnelle dans L^2 : il existe deux projections orthogonales p et q telles que $p(X) = Y$ et $q(Y) = X$, donc
$$\|X\| = \|q(Y)\| \leq \|Y\|$$
et de même dans l'autre sens. On a donc égalité, donc $Y \in \mathrm{Im}(q)$, donc $X = q(Y) = Y$.
2. Soit $a \geq 0$. L'égalité
$$\mathbb{E}\left[X \mathbb{1}_{X \leq a}\right] = \mathbb{E}\left[Y \mathbb{1}_{X \leq a}\right]$$
est une conséquence immédiate de la définition de l'espérance conditionnelle. Notons que le membre de gauche est fini, donc le membre de droite l'est aussi. L'égalité se réécrit
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)\mathbb{1}_{X \leq a}\right] = 0,$$
où la variable $(X-Y)\mathbb{1}_{X \leq a}$ est intégrable car c'est la différence de deux variables intégrables. De manière symétrique, on obtient
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)\mathbb{1}_{Y \leq a}\right] = 0$$
donc, en faisant la différence des deux,
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)\left(\mathbb{1}_{Y \leq a} - \mathbb{1}_{X \leq a}\right)\right] = 0.$$

Or, si $\mathbb{1}_{Y\leq a} - \mathbb{1}_{X\leq a} > 0$ alors $Y \leq a < X$, et si $\mathbb{1}_{Y\leq a} - \mathbb{1}_{X\leq a} < 0$ alors $Y > a \geq Y$. La variable $(X-Y)\left(\mathbb{1}_{Y\leq a} - \mathbb{1}_{X\leq a}\right)$ est donc positive. Comme elle est d'espérance nulle, elle est nulle p.s.. On en déduit

$$\mathbb{1}_{Y\leq a} = \mathbb{1}_{X\leq a} \quad \text{p.s..}$$

Presque sûrement, ceci est vrai pour tout a rationnel positif, donc presque sûrement il n'existe pas de a rationnel tel que $X \leq a < Y$, d'où $X \geq Y$ p.s.. On a de même l'inégalité inverse, d'où $X = Y$ p.s..

Exercice 2 (Convergence L^2 des martingales rétrogrades)
Soit $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$, avec $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$. Soit X une variable aléatoire de carré intégrable.

1. Montrer que les variables $\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]$ sont orthogonales dans L^2, et que la série
$$\sum_{n\geq 0} (\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}])$$
converge dans L^2.
2. Montrer que si $\mathscr{F}_\infty = \bigcap_{n\geq 0} \mathscr{F}_n$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_\infty] \quad \text{dans } L^2.$$

Solution de l'exercice 2

1. On calcule, pour $m < n$:
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n])\left(\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{m+1}] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_m]\right)\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{m+1}] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]\mathbb{E}[Y|\mathscr{F}_m] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n]\mathbb{E}[Y|\mathscr{F}_{m+1}] + \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n]\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_m]\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{m+1}]^2 - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_m]^2 - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{m+1}]^2 + \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_m]^2\right] \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$
ce qui montre que la famille $(\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}])_{n\geq 0}$ est orthogonale. De plus, pour $m = n$, on a
$$\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n])^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n]^2 - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]^2\right],$$
donc par téléscopage $\sum \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{n+1}) - \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n))^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathscr{F}_0\right]^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] < +\infty$, d'où la convergence de la série dans L^2, par critère de Cauchy dans L^2.
2. On déduit de la question précédente que $\mathbb{E}\left[X|\mathscr{F}_n\right]$ converge, on note Y la variable aléatoire limite. On n'a plus qu'à montrer que $Y = \mathbb{E}\left[X|\mathscr{F}_\infty\right]$. Soit Z une variable $\mathscr{F}_\infty$-mesurable bornée. En particulier, pour tout n, elle est $\mathscr{F}_n$-mesurable donc
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathscr{F}_n\right]Z\right] = \mathbb{E}\left[XZ\right].$$
Quand n tend vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers $\mathbb{E}[YZ]$ (en utilisant la convergence de $\mathbb{E}\left[X|\mathscr{F}_n\right]$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz), d'où $\mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[XZ]$, d'où $Y = \mathbb{E}\left[X|\mathscr{F}_\infty\right]$.

Remarque Il est aussi possible de résoudre entièrement l'exercice en utilisant seulement le fait que L^2 est un espace de Hilbert. On vérifie facilement que le sous-espace des variables $\mathscr{F}_\infty$-mesurables est l'intersection décroissantes des sous-espaces des variables $\mathscr{F}_n$-mesurables. Il suffit donc de montrer que dans un espace de Hilbert, les projections orthogonales sur une suite décroissante de sous-espaces fermés convergent vers la projection orthogonale sur l'intersection de ces sous-espaces.
Exercice 3 (Espérance conditionnelle et positivité) Soit X une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Montrer que $\{\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] > 0]\}$ est le plus petit ensemble $\mathscr{G}$-mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Solution de l'exercice 3 La variable aléatoire $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ est par définition $\mathscr{G}$-mesurable, et $]0,+\infty[$ est un borélien, donc $\{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]>0\}$ est un ensemble $\mathscr{G}$-mesurable. De plus, par définition de l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]=0}\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\,\mathbb{1}_{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]=0}\right]=0.$$

Or $X\mathbb{1}_{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]=0}\geq 0$ p.s., donc $X\mathbb{1}_{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]=0}=0$ p.s.. Cela signifie que

$$\{X>0\}\subset\{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]>0\}$$

à un ensemble négligeable près.

D'autre part, soit A un ensemble $\mathscr{G}$-mesurable contenant $\{X>0\}$. Alors on a $X=0$ p.s. sur A^c. Toujours par définition de l'espérance conditionnelle on a donc

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\,\mathbb{1}_{A^c}\right]=\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{A^c}\right]=0.$$

De même $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\geq 0$, donc sur A^c on a $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]=0$ p.s., soit $\{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]>0\}\subset A$ à un ensemble négligeable près.

2 Lois conditionnelles

Exercice 4 Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables i.i.d. intégrables, et $S=\sum_{i=1}^n X_i$.
- Calculer $\mathbb{E}[S|X_1]$ et $\mathbb{E}[X_1|S]$.
- Dans le cas où les X_i sont exponentielles de paramètre $\lambda>0$, déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant S.

Solution de l'exercice 4
- On a
$$\mathbb{E}[S|X_1]=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}[X_i|X_1]=X_1+(n-1)\mathbb{E}[X_1].$$
D'autre part, on a
$$\sum_{i=1}^n\mathbb{E}[X_i|S]=\mathbb{E}[S|S]=S.$$
Or, les variables X_i jouent des rôles symétriques, donc les $\mathbb{E}[X_i|S]$ sont toutes égales, d'où
$$\mathbb{E}[X_1|S]=\frac{1}{n}S.$$
On peut aussi le vérifier plus proprement de la manière suivante. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mesurable bornée. On sait que la loi jointe du couple (X_i,S) ne dépend pas de i, donc les $\mathbb{E}[X_if(S)]$ sont les mêmes pour tout i. Comme leur somme vaut $\mathbb{E}[Sf(S)]$, on a donc
$$\mathbb{E}[X_1f(S)]=\mathbb{E}\left[\frac{S}{n}f(S)\right]$$
pour toute fonction f mesurable bornée, donc $\mathbb{E}[X_1|S]=\frac{S}{n}$.
- Soient f et g deux fonctions mesurables bornées. On cherche à calculer $\mathbb{E}[g(X_1)|S]$. Pour cela, on calcule
$$\mathbb{E}[g(X_1)f(S)]=\int_{\mathbb{R}_+^n}g(x_1)f(x_1+\cdots+x_n)\lambda^ne^{-\lambda x_1}\dots e^{-\lambda x_n}\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n.$$
En faisant le changement de variables $s_i=x_1+\cdots+x_i$, on obtient
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X_1)f(S)]&=\int_{0\leq s_1\leq\cdots\leq s_n}g(s_1)f(s_n)\lambda^ne^{-\lambda s_n}\mathrm{d}s_1\dots\mathrm{d}s_n\\&=\frac{\lambda^n}{(n-2)!}\int_{0\leq x\leq s}g(x)f(s)(s-x)^{n-2}e^{-\lambda s}\mathrm{d}x\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

en intégrant selon $s_2, \dots, s_{n-1}$. En prenant pour g la fonction constante égale à 1, on obtient

$$\mathbb{E}\left[f(S)\right] = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} f(s)s^{n-1}e^{-\lambda s}\mathrm{d}s,$$

donc S a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!}s^{n-1}e^{-\lambda s}.$$

On cherche à faire apparaître cette densité dans l'expression trouvée précédemment :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(X_1)f(S)\right] &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} f(s)s^{n-1}e^{-\lambda s}\left(\int_0^s g(x)(n-1)\frac{(s-x)^{n-2}}{s^{n-1}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s \\
&= \mathbb{E}\left[f(S)\int_0^S g(x)(n-1)\frac{(S-x)^{n-2}}{S^{n-1}}\mathrm{d}x\right].
\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{E}\left[g(X_1)|S\right] = \int_0^S g(x)(n-1)\frac{(S-x)^{n-2}}{S^{n-1}}\mathrm{d}x.$$

Ceci est vrai pour toute fonction g mesurable bornée, donc la loi conditionnelle de X_1 sachant S a pour densité

$$(n-1)\frac{(S-x)^{n-2}}{S^{n-1}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Notons qu'en particulier, pour $n = 2$, cette densité est constante. Ainsi, conditionnellement à $X_1 + X_2$, la variable X_1 est uniforme sur $[0, X_1 + X_2]$.

Exercice 5 (Processus ponctuel de Poisson)
On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble aléatoire de points dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout borélien A, on note $N(A) = |\mathcal{P} \cap A|$. On dit que $\mathcal{P}$ est un *processus ponctuel de Poisson* si :

1. pour tout borélien A tel que $\lambda(A) < +\infty$, la variable $N(A)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(A)$,
2. pour tous boréliens disjoints $A_1, \dots, A_k$, les variables $N(A_i)$ sont indépendantes.

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $\lambda(A) < +\infty$. Montrer que conditionnellement à $N(A)$, les points de $\mathcal{P}$ dans A ont la loi de $N(A)$ points uniformes.

Indication : On pourra estimer la probabilité que les points se trouvent dans k ensembles disjoints fixés, puis utiliser le lemme de classe monotone pour montrer qu'il est suffisant de considérer des ensembles disjoints.

Solution de l'exercice 5 Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $x \in A$ et $\varepsilon > 0$, on note $B_\varepsilon(x)$ le cube de centre x et de côté ε, c'est-à-dire l'ensemble des y tels que $\|x - y\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Si $N(A) = k$, on numérote les k points de $\mathcal{P} \cap A$ de manière aléatoire uniforme $X_1, \dots, X_k$. Soient également $Y_1, \dots, Y_k$ des points indépendantes uniformes dans A. On va montrer que pour tous points $x_1, \dots, x_k$ deux à deux distincts, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$\mathbb{P}\left(X_1 \in B_\varepsilon(x_1), \dots, X_k \in B_\varepsilon(x_k) | N(A) = k\right) = \mathbb{P}\left(Y_1 \in B_\varepsilon(x_1), \dots, Y_k \in B_\varepsilon(x_k)\right). \tag{1}$$

On prend $\varepsilon > 0$ assez petit pour que les cubes $B_\varepsilon(x_i)$ sont inclus dans A et deux à deux distinct. On pose $A_i = B_\varepsilon(x_i)$. On a alors

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_1 \in A_1, \ldots, X_k \in A_k | N(A) = k\right) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}\left(N(A) = k\right)} \frac{1}{k!} \mathbb{P}\left(N(A_1) = \cdots = N(A_k) = 1, N\left(A \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_k)\right) = 0\right) \\
&= \frac{1}{k!} \frac{1}{\text{🐟}_{\lambda(A)}(k)} \times \prod_{i=1}^{k} \text{🐟}_{\lambda(A_i)}(1) \times \text{🐟}_{\lambda(A \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_k))}(0) \\
&= \frac{e^{\lambda(A)}}{\lambda(A)^k} \times \prod_{i=1}^{k} \lambda(A_i) e^{-\lambda(A_i)} \times e^{-\lambda(A \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_k))} \\
&= \frac{1}{\lambda(A)^k} \prod_{i=1}^{k} \lambda(A_i) = \frac{\varepsilon^{dk}}{\lambda(A)^k} \\
&= \mathbb{P}\left(Y_1 \in A_1, \ldots, Y_k \in A_k\right),
\end{aligned}
$$

où le facteur $\frac{1}{k!}$ au début vient du fait que les X_i sont numérotés aléatoirement, et que seule une numérotation peut permettre d'avoir X_1 dans A_1 et ainsi de suite. Cela prouve (1).

On sait que (X_i) et (Y_i) sont deux variables aléatoires à valeurs dans

$$\widetilde{A^k} = \{(x_1, \ldots, x_k) \in A^k | \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}.$$

On voudrait montrer que pour tout borélien B inclus dans $\widetilde{A}^k$, on a

$$\mathbb{P}\left((X_1, \ldots, X_k) \in B\right) = \mathbb{P}\left((Y_1, \ldots, Y_k) \in B\right).$$

On l'a montré pour les ensembles de la forme

$$B = \prod_{i=1}^{k} B_\varepsilon(x_i),$$

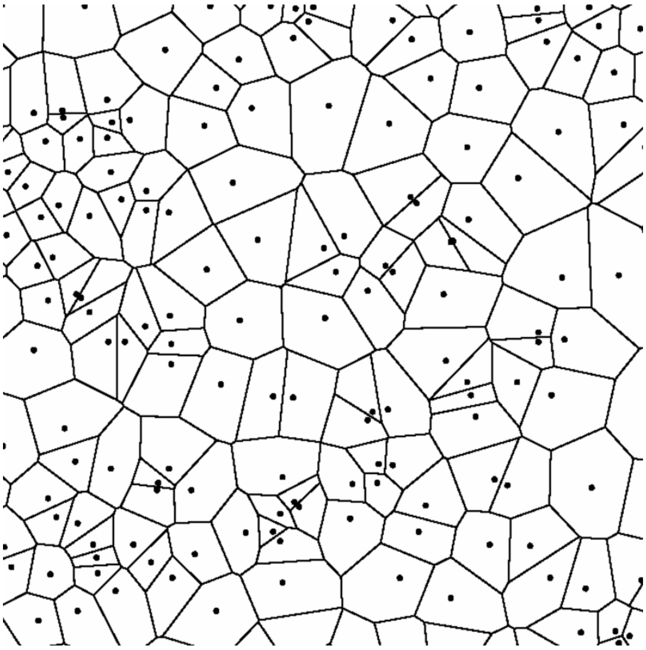
où les cubes considérés sont disjoints et inclus dans A. Les B de cette forme sont stables par intersections finies. De plus, ils forment une base d'ouverts de $\widetilde{A^k}$, donc engendrent la tribu borélienne sur $\widetilde{A^k}$, donc d'après le lemme de classe monotone, il est bien suffisant de considérer ces ensembles.

Remarque Cette propriété montre qu'un processus ponctuel de Poisson est une manière naturelle de tirer au sort "une infinité de points indépendants uniformes" dans $\mathbb{R}^d$, de manière à n'en avoir qu'un nombre fini dans tout compact.

Elle est aussi utile pour montrer l'existence de tels ensembles de points et pour les simuler. On peut procéder ainsi. On découpe $\mathbb{R}^d$ en une infinité de cubes unités $(c_i)_{i \in I}$. Soient $(N_i)_{i \in I}$ des variables de Poisson i.i.d. de paramètre 1. Pour tout i, conditionnellement à N_i, on tire au sort N_i points i.i.d. uniformes dans le cube c_i. L'ensemble aléatoire de points obtenu est alors bien un processus ponctuel de Poisson (ce n'est pas trivial, mais pas très dur non plus à vérifier).

Remarque Voici une application "concrète". Des statisticiens ont remarqué que le processus ponctuel de Poisson dans le plan modélisait très bien les impacts des bombardements de Londres par les nazis en 1944. Cela laisse supposer que les bombes étaient envoyées au hasard, sans but précis.

Exercice 6 Que représente la jolie image ci-dessous ?



<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Les points forment un processus ponctuel de Poisson $\mathcal{P}$ dans le plan. On a de plus tracé les *cellules de Voronoï* associées à ces points : pour chaque point $x \in \mathcal{P}$, la cellule de Voronoï autour de x est l'ensemble des points qui sont plus proches de x que de tout autre point de $\mathcal{P}$. Cela permet de générer des structures dont les propriétés à grande échelles sont proches de celles d'un réseau carré ou triangulaire. Elles sont moins régulières localement, mais possèdent une forme d'invariance par rotation qui n'est pas vérifiée par exemple par le réseau carré.