Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2017-2018 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 7 : Martingales, théorème d'arrêt
Corrigé

Vendredi 27 Octobre

1 Temps d'arrêt

Exercice 1 (Vrai ou faux)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. Lesquelles des variables suivantes sont des temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)$?

1. $T_1 = \min\{n \geq 0 | S_n = 2017\}$,
2. $T_2 = \min\{n \geq 2017 | S_n = S_{n-2017}\}$,
3. $T_3 = \min\{n \geq 0 | S_n = S_{n+2017}\}$,
4. $T_4 = \min\{n \geq T_1 | S_n = 0\}$,
5. $T_5 = \max\{n \in [\![0, 2017]\!] | S_n = 0\}$,
6. $T_6 = \min\{n \in [\![0, 2017]\!] | \forall m \in [\![0, 2017]\!], S_m \leq S_n\}$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Les temps T_1, T_2 et T_4 sont des temps d'arrêts, car à chaque fois l'événement $\{T \leq n\}$ ne dépend que de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. En revanche, T_3, T_5 et T_6 n'en sont pas puisque les événements $\{T_3 = 0\}$, $\{T_5 = 0\}$ et $\{T_6 = 0\}$ ne sont pas $\mathcal{F}_0$-mesurables.

Exercice 2 (Ce qui peut arriver, arrivera)
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a p.s.

$$\mathbb{P}(T \leq n + n_0 | \mathcal{F}_n) > \varepsilon.$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On montre par récurrence sur k que pour tout $k \geq 0$:

$$\mathbb{P}(T \geq kn_0) \leq (1-\varepsilon)^k.$$

C'est vrai pour $k = 0$ et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \geq (k+1)n_0) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T \geq kn_0} \mathbb{1}_{T \geq (k+1)n_0}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T \geq kn_0} \mathbb{P}\left(T \geq kn_0 + n_0 \mid \mathcal{F}_{kn_0}\right)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T \geq kn_0}(1-\varepsilon)\right] \\ &\leq (1-\varepsilon)^{k+1}, \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. On en déduit aisément que $\mathbb{E}[T] < +\infty$ et en particulier que T est presque sûrement fini.

Remarque Il s'agit d'une généralisation de la question 1 de l'exercice 9 du TD 5.

2 Martingales et marches aléatoires

Exercice 3 (À la pêche aux martingales)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \cdots S_n)$.

1. Montrer que (S_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $(S_n^2 - n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
3. Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
4. Soit $P(X, Y)$ un polynôme à deux variables. Montrer que $(P(S_n, n))$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si pour tous $s, n \in \mathbb{Z}$, on a
$$P(s+1, n+1) - 2P(s, n) + P(s-1, n+1) = 0.$$
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(\alpha S_n - \beta n)$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)$.

Solution de l'exercice 3 On note $X_n = S_n - S_{n-1}$ les pas de la marche aléatoire.

1. On a
$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n$$
par indépendance des accroissements.
2. On a
$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[S_n^2|\mathcal{F}_n\right] + 2S_n\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right] = S_n^2 + 1.$$
On a donc $\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n\right] = S_n^2 - n$, donc on a bien une martingale.
3. Le calcul est similaire :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(S_{n+1})^3 - 3(n+1)S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= S_n^3 + 3S_n^2\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] + 3S_n\mathbb{E}\left[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^3|\mathcal{F}_n\right] \\ &- 3(n+1)\mathbb{E}\left[S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= S_n^3 + 3S_n - 3(n+1)S_n \\ &= S_n^3 - 3nS_n. \end{aligned}$$
4. On calcule
$$\mathbb{E}\left[P(S_{n+1}, n+1)|\mathcal{F}_n\right] = \frac{1}{2}P(S_n + 1, n+1) + \frac{1}{2}P(S_n - 1, n+1).$$
Il suffit donc de $P(X+1, n+1) - 2P(X, n) + P(X-1, n+1) = 0$.
5. On calcule
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{\alpha S_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[e^{\alpha S_n}e^{\alpha X_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= e^{\alpha S_n}\mathbb{E}\left[e^{\alpha X_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}e^{\alpha S_n}. \end{aligned}$$
Il faut donc choisir $\beta = \ln(\mathrm{ch}(\alpha))$.

Exercice 4 (Temps de sortie II, le retour)
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$. Soient $a, b \geq 0$ et $T = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}$. On rappelle que $T < +\infty$ p.s..

1. En utilisant la première martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, redémontrer
$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{a+b}.$$
2. En utilisant la seconde martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, redémontrer
$$\mathbb{E}[T] = ab.$$

Indication : Le temps d'arrêt T n'est pas borné. Il faut donc passer par des temps d'arrêt de la forme $T \wedge t = \min(T, t)$.

Solution de l'exercice 4

1. Soit $t > 0$. Alors $T \wedge t$ est un temps d'arrêt borné, auquel on peut appliquer le théorème d'arrêt :

$$\mathbb{E}[S_{T\wedge t}] = \mathbb{E}[S_0] = 0.$$

De plus, $T < +\infty$ p.s. donc $S_{T\wedge t}$ converge p.s. vers S_T, et on a $-a \leq S_{T\wedge t} \leq b$ pour tout t. Par convergence dominée, on a donc

$$\mathbb{E}[S_T] = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[S_{T\wedge t}] = 0.$$

D'autre part, en notant $p = \mathbb{P}\left(S_T = b\right)$, on a

$$0 = \mathbb{E}[S_T] = (1-p)(-a) + pb,$$

d'où $p = \frac{a}{a+b}$.

2. Soit $t > 0$. En appliquant le théorème d'arrêt à $S_n^2 - n$ et au temps d'arrêt $T \wedge t$, on obtient

$$\mathbb{E}[T \wedge t] = \mathbb{E}[S_{T\wedge t}^2].$$

Comme dans la première question, en utilisant $T < +\infty$ p.s., le membre de gauche converge vers $\mathbb{E}[T]$ par convergence monotone et le membre de droite vers $\mathbb{E}[S_T^2]$ par convergence dominée. On a donc, en utilisant la première question :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[S_T^2] \\ &= \frac{b}{a+b}(-a)^2 + \frac{a}{a+b}b^2 \\ &= ab. \end{aligned}$$

Remarque Si vous n'êtes pas fatigués par les calculs : en utilisant la troisième martingale de l'exercice précédent (ainsi que les deux questions précédentes), on peut calculer

$$\mathbb{E}[T|S_T = b] = \frac{1}{3}\left(2ab + b^2\right).$$

Exercice 5 (Martingales et marche biaisée)
Soit $p \neq \frac{1}{2}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec X_i i.i.d. et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$.

1. Trouver α tel que α^{S_n} soit une martingale.
2. Soient a, b et T comme dans l'exercice précédent. Calculer $\mathbb{P}(S_T = b)$.

Solution de l'exercice 5

1. On a $\mathbb{E}[\alpha^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n] = \alpha^{S_n}\mathbb{E}[\alpha^{X_{n+1}}] = \alpha^{S_n}\left(p\alpha + (1-p)\alpha^{-1}\right)$. Le processus (α^{S_n}) est donc une martingale ssi

$$p\alpha + (1-p)\alpha^{-1} = 1,$$

ce qui est une équation de degré 2 en α. En la résolvant, on obtient $\alpha = 1$ (ce qui n'est pas très intéressant) ou $\alpha = \frac{1-p}{p}$.

2. En reprenant exactement le raisonnement de l'exercice précédent (question 1), on trouve

$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{1-\alpha^a}{1-\alpha^{a+b}}$$

avec $\alpha = \frac{1-p}{p}$.

Notons que si par exemple $p > \frac{1}{2}$, alors $\alpha < 1$ donc, en faisant tendre b vers $+\infty$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(T_{-a} < +\infty\right) = 1 - \alpha^a = 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a$$

pour $a \geq 0$, où $T_{-a} = \min\{n \geq 0 | S_n = -a\}$. On en déduit que $-\min\{S_n | n \geq 0\}$ suit une loi géométrique de paramètre $\alpha = \frac{1-p}{p}$.

Exercice 6 (Un contre-exemple)
Trouver un processus $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $E[|M_n|] < +\infty$ pour tout n et tel que $E[M_{n+1} \mid M_n] = M_n$ pour tout n, mais sans que M soit une martingale.

Solution de l'exercice 6 On considère une marche aléatoire simple démarrant de 0 avec des pas indépendants ± 1, mais au premier retour en 0, la marche est obligée de faire le même pas que son tout premier. Pour $n \geq 1$, on a alors

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} | \mathcal{F}_n\right] = \begin{cases} M_n & \text{si } M_n \neq 0, \\ -1 & \text{si } M_n = 0 \text{ et } M_1 = -1, \\ 1 & \text{si } M_n = 0 \text{ et } M_1 = 1. \end{cases}$$

En particulier, $\mathbb{E}\left[M_{n+1} | \mathcal{F}_n\right] \neq M_n$ si $M_n = 0$, donc M n'est pas une martingale.

3 Martingales, chimpanzés et vaisseaux spatiaux

Exercice 7 (Singe savant)
Un chimpanzé est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois une lettre choisie uniformément parmi les 26 lettres de l'alphabet, indépendamment des lettres précédentes. On note T le premier temps auquel les 11 dernières lettres écrites par le singe forment le mot "ABRACADABRA". Le but de l'exercice est de calculer $\mathbb{E}[T]$. Pour cela, on va définir une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup (beaucoup, beaucoup) de bananes. On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \ldots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1 banane avec lui sur l'événement

$$\{\text{la } n\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "A"}\}.$$

Si il perd, il part (et le singe met 1 banane dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26 bananes du singe, qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+1\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "B"}\}.$$

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit 26^2 bananes qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+2\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "R"}\}.$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce que "ABRACADABRA" sorte de la machine. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe.

1. Montrer que le nombre de bananes dans le sac du chimpanzé au temps n est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, où $\mathcal{F}_n$ est la tribu engendrée par les n premières lettres tapées par l'animal.
2. En déduire
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$
3. Refaire le même exercice en remplaçant "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK". Commenter.

Solution de l'exercice 7

1. Cela est dû au fait que les paris sont à chaque étape "équilibrés" : conditionnellement à $\mathcal{F}_n$, l'espérance de gain de chacun des parieurs est nulle donc l'espérance de gain du singe aussi.

2. Supposons d'abord qu'on puisse appliquer le théorème d'arrêt à T : alors la variation du nombre de bananes dans le sac du singe au temps T est d'espérance nulle, donc l'espérance de ses gains est égale à l'espérance de ses pertes. Les pertes du singe sont faciles à calculer : au moment où ABRACADABRA sort, il y a 3 parieurs derrière le singe : un qui est arrivé juste avant le premier "A" et qui repart avec 26^{11} bananes, un qui est arrivé juste avant le second "A" et qui repart avec 26^4 bananes, et un qui est arrivé juste avant le dernier "A" et qui repart avec 26 bananes. Les pertes du singe sont donc de $26^{11} + 26^4 + 26$ bananes. D'autre part, chacun des T parieurs qui est passé a donné une banane au singe (y compris les 3 parieurs qui gagnent à la fin), donc les gains du singe sont de T bananes.

   Pour écrire cela proprement, on peut appliquer le théorème d'arrêt à $T \wedge t$. Les gains du singe au temps $T \wedge t$ valent alors $T \wedge t$ et on a $\mathbb{E}[T \wedge t] \to \mathbb{E}[T]$ par convergence monotone. Les pertes du singe sont majorées par $26^{11} + 26^{10} + \cdots + 1$ et tendent p.s. vers $26^{11} + 26^4 + 26$ quand t tend vers $+\infty$, donc leur espérance tend vers $26^{11} + 26^4 + 26$ bananes par convergence dominée.
3. On obtient $\mathbb{E}[T] = 26^{11}$, soit une espérance strictement inférieure à celle du temps d'apparition de ABRACADABRA. Si cela peut paraître contre-intuitif, la raison est que les sous-mots qui se répètent ("A" et "ABRA") introduisent des corrélations positives entre l'apparition de "ABRACADABRA" à deux rangs différents, ce qui augmente les chances que l'événement se produise très tard.

Exercice 8 (Vaisseau spatial perdu)
Le *Millenium Falcon* se trouve à une distance D_0 du Soleil mais ses commandes ne répondent plus : toutes les heures, Han Solo ne peut qu'entrer une distance R_n inférieure à la distance au Soleil dans l'ordinateur de bord, qui effectue alors un saut dans l'hyperespace de longueur R_n et de direction choisie uniformément dans la sphère S^2. On note D_n la distance du vaisseau au Soleil après n sauts et $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les n premiers sauts. Han Solo veut revenir dans le système solaire, c'est-à-dire à distance au plus d du Soleil.

1. En utilisant des souvenirs de physique de prépa (théorème de Gauss), montrer que $\left(\frac{1}{D_n}\right)$ est une martingale.
2. En déduire que la probabilité que Han Solo revienne un jour dans le système solaire est inférieure ou égale à $\frac{d}{D_0}$.
3. A la place du pilote, feriez-vous plutôt de grands ou de petits sauts ?

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Toutes les justifications des interversions seront laissées en exercice.

1. Soit X_n la variable aléatoire à valeurs dans S^2 qui indique la direction du n-ième saut, et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Notons qu'au moment où il choisit R_{n+1}, la seule information dont dispose le pilote est l'ensemble des sauts déjà effectués, donc $\mathcal{F}_n$, donc R_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable. On veut montrer que $\mathbb{E}\left[\|S_n + R_{n+1}X_{n+1}\|^{-1} | \mathcal{F}_n\right] = \|S_n\|^{-1}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, on pose $f(x) = \|x\|^{-1}$. On a

$$\mathbb{E}\left[f\left(S_n + R_{n+1}X_{n+1}\right) | \mathcal{F}_n\right] = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(X_{n+1} + R_{n+1}u) \, \mathrm{d}u.$$

   On veut donc montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}^3$ et $r < \|x\|$:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x + ru) \, \mathrm{d}u = f(x).$$

   Il suffit pour cela de vérifier que la dérivée par rapport à r du membre de gauche est nulle (par convergence dominée, il tend bien vers $f(x)$ quand $r \to 0$). Notons que le membre de gauche a une discontinuité en $r = \|x\|$, c'est pourquoi on impose $r < \|x\|$. En intervertissant dérivée et intégrale puis en appliquant le théorème de Gauss, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_{S^2} f(x+ru)\,\mathrm{d}u &= \int_{S^2} r\,\nabla f(x+ru)\cdot u\,\mathrm{d}u \\
&= r^2\int_{B_1} \mathrm{div}(\nabla f(x+y))\,\mathrm{d}y \\
&= r^2\int_{B_1} \Delta f,
\end{aligned}$$

où B_1 est la boule de rayon 1 autour de l'origine dans $\mathbb{R}^3$. Un simple calcul (ou, à nouveau, des souvenirs de physique de prépa) montre que le Laplacien Δf est nul sur $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, donc $\frac{1}{D_n}$ est bien une martingale.

2. Soit $T = \inf\{n|D_n \leq d\}$. Le temps T est un temps d'arrêt (éventuellement infini), donc on peut appliquer le théorème d'arrêt à $T \wedge t$ et à la martingale $\frac{1}{D_n}$:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{D_{T\wedge t}}\right] = \frac{1}{D_0}.$$

On en déduit,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\,(T \leq t) &= \mathbb{P}\,(D_{T\wedge t} \leq d) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{D_{T\wedge t}} \geq \frac{1}{d}\right) \\
&\leq \left(\frac{1}{d}\right)^{-1}\mathbb{E}\left[\frac{1}{D_{T\wedge t}}\right] \\
&= \frac{d}{D_0}
\end{aligned}$$

en utilisant à la fin l'inégalité de Markov. Ceci est valable pour tout $t > 0$, donc $\mathbb{P}\,(T < +\infty) \leq \frac{d}{D_0}$.

3. On veut que l'inégalité de la question précédente soit la plus serrée possible. Le seul endroit où on n'a pas égalité ci-dessus est dans l'inégalité de Markov (avant-dernière ligne du dernier calcul). Pour que l'inégalité de Markov soit serrée, il faut que $\frac{1}{D_{T\wedge t}}$ ne puisse pas être "beaucoup" plus grande que $\frac{1}{d}$. Il faut donc faire de petits sauts à l'approche du système solaire. On peut vérifier (exercice !) que pour tout $\varepsilon > 0$, si le saut à chaque étape n est inférieur ou égal à $D_n - d + \varepsilon$, alors on a $\mathbb{P}\,(T < +\infty) \geq \frac{d-\varepsilon}{D_0}$.

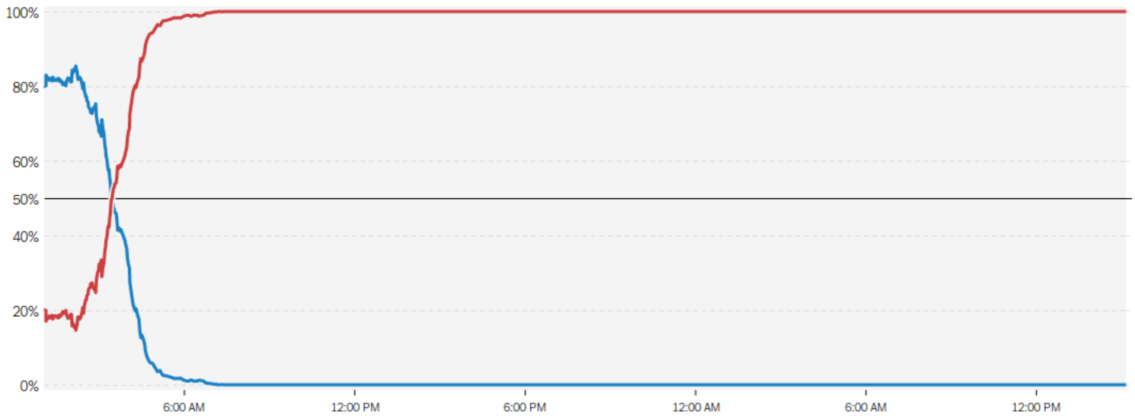
Remarque L'hypothèse "les sauts sont plus petits que la distance au Soleil" peut paraître arbitraire. En supprimant cette hypothèse, le processus $\left(\frac{1}{D_n}\right)_{n\geq 0}$ n'est plus forcément une martingale mais une *surmartingale*, c'est-à-dire que $E\left[\frac{1}{D_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] \leq \frac{1}{D_n}$. La raison est que, au sens des distributions, le Laplacien de $x \to \|x\|^{-1}$ sur $\mathbb{R}^3$ est (à une constante) multiplicative près) $-\delta_0$, donc est négatif. Le théorème d'arrêt peut s'adapter aux surmartingales et donne

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{D_{T\wedge t}}\right] \leq \frac{1}{D_0}.$$

L'inégalité étant dans le bon sens, le résultat de la question 2 reste vrai. Cela montre que faire des sauts trop grands ne peut qu'aggraver la situation de notre vaisseau.

4 Une image intéressante

Exercice 9



1. L'image ci-dessus a-t-elle l'air de représenter une martingale ?
2. Que représente-t-elle ? Expliquer pourquoi les processus représentés devraient être des martingales.
3. Que peut-on en conclure ?

Solution de l'exercice 9

1. Cela ne ressemble pas à une martingale, car le processus observé a tendance à continuer à augmenter s'il vient d'augmenter, et à diminuer s'il vient de diminuer. Une martingale devrait en moyenne autant augmenter que diminuer si elle vient d'augmenter.
2. Cette image vient du site du New York Times, la nuit des dernières élections présidentielles américaines. À chaque instant t, un algorithme donnait en direct, en fonction des résultats partiels disponibles à l'instant t, la probabilité que chacun des deux candidats remporte l'élection présidentielle.

   Si on note $\mathcal{F}_t$ la tribu engendré par les résultats partiels disponibles à l'instant t, alors $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration, et le processus à l'instant t devrait être égal à la probabilité, conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, qu'un certain candidat remporte l'élection. Or, si $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration et X une variable aléatoire, on sait que $(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t])$ est une martingale.
3. On peut en conclure que l'algorithme utilisé par le New York Times n'est probablement pas tout à fait au point : au moment où les courbes se sont croisées, le candidat rouge avait en fait déjà de fortes chances de remporter l'élection.