Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2017-2018 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 8 : Convergence des martingales
Corrigé

Mercredi 8 Novembre

1 Convergence des martingales

Exercice 1 (Exemples et contre-exemples)

1. Trouver un exemple de martingale qui n'est pas bornée dans L^1.
2. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. mais n'est pas bornée dans L^1.
3. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$.
4. Trouver un exemple de martingale bornée dans L^1 mais qui ne converge pas dans L^1.

Solution de l'exercice 1

1. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$.
2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables indépendantes vérifiant
$$\mathbb{P}(X_n = 100^n) = \mathbb{P}(X_n = -100^n) = \frac{1}{10^n}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{10^n},$$
et $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \geq 0$. On vérifie facilement que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout n, donc M est une martingale. On a de plus $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{10^n} < +\infty$, donc par Borel-Cantelli, presque sûrement, $X_n = 0$ pour n assez grand et (M_n) converge p.s. Enfin, pour tout n, si $X_n = 100^n$ alors $M_n \geq \frac{100^n}{2}$ donc
$$\mathbb{E}[|M_n|] \geq \frac{100^n}{2}\mathbb{P}\left(M_n \geq \frac{100^n}{2}\right) = \frac{100^n}{2}\mathbb{P}(X_n = 100^n) = \frac{10^n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
3. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables indépendantes vérifiant
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{n^2}{n^2+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_n = -n^2\right) = \frac{1}{n^2+1},$$
et $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$. On vérifie facilement que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout n, donc M est une martingale. On a de plus $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1} < +\infty$, donc par Borel-Cantelli, presque sûrement, $X_n = 1$ pour n assez grand et $M_n \to +\infty$ p.s.
4. Soient $(X_i)_{i\geq 0}$ des variables i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{1}{2}$, et $M_n = \prod_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \geq 0$. On a $\mathbb{E}[X_n] = 1$ pour tout n donc M est bien une martingale. De plus, p.s. il existe i tel que $X_i = 0$, donc $M_n = 0$ pour n assez grand, donc M converge p.s. vers 0, et M ne peut pas converger dans L^1 car $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] = 1$ pour tout n. En revanche, on a $\mathbb{E}[|M_n|] = \mathbb{E}[M_n] = 1$ pour tout n, donc M est bien bornée dans L^1.

Exercice 2 (Urne de Polya)
À l'instant 0, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule uniformément et on la remplace par deux boules de sa couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 1. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

1. Donner $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n | \mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.
3. *Cas* $a = b = 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$. En déduire la loi de U.
4. *Cas général.* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:
$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(N_0+n)(N_0+n+1)\dots(N_0+n+k-1)}.$$
Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.
5. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). Expliquer pourquoi on a caractérisé la loi de U.

Solution de l'exercice 2

1. On a
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}\left(\text{la } n^{\text{ième}} \text{ boule tirée est blanche} | \mathcal{F}_n\right) = X_n,$$
et de même
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n | \mathcal{F}_n) = 1 - X_n\,.$$
2. Pour tout $n \geq 1$, la variable X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $X_n \in [0,1]$ donc est intégrable et, d'après la question précédente,
$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \frac{Y_n+1}{N_0+n+1}X_n + \frac{Y_n}{N_0+n+1}(1-X_n) = \frac{X_n+Y_n}{N_0+n+1} = X_n\,,$$
donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale. Elle est de plus bornée dans L^∞, donc dans L^k pour tout k, donc elle converge p.s. et dans L^k pour tout k vers une variable U. On a donc bien
$$\mathbb{E}[X_n^k] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[U^k].$$
3. On raisonne par récurrence sur n. L'initialisation à $n = 0$ est immédiate. Soit $n \geq 1$ et supposons que la loi de Y_{n-1} est la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. Soit aussi $k \geq 2$. Alors
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n = k) &= \mathbb{P}(Y_n = k \text{ et } Y_{n-1} = k) + \mathbb{P}(Y_n = k \text{ et } Y_{n-1} = k-1) \\
&= \mathbb{P}(Y_{n-1} = k)\mathbb{P}(Y_n = k | Y_{n-1} = k) + \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1)\mathbb{P}(Y_n = k | Y_{n-1} = k-1) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{la } n\text{-ième boule prise est rouge } | Y_{n-1} = k)}{n} \\
&\quad + \frac{\mathbb{P}(\text{la } n\text{-ième boule prise est blanche} | Y_{n-1} = k-1)}{n} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1-k}{n+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{k-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$
D'autre part,
$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(\text{les } n \text{ boules tirées sont rouges}) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,.$$

On en déduit que Y_n suit bien une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$.
Il en découle que X_n suit une loi uniforme sur $\{1/(n+2), 2/(n+2), ..., (n+1)/(n+2)\}$ pour tout $n \geq 0$. Or (X_n) converge p.s. donc en loi vers U, donc U suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

4. Pour tout $n \geq 0$, la variable Z_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et $Z_n \in [0,1]$ donc est intégrable, et

$$Z_{n+1} = \begin{cases} \frac{Y_n \ldots (Y_n+k-1)}{(N_0+n+1)(N_0+n+2)\ldots(N_0+n+k)} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n \\ \frac{(Y_n+1)\ldots(Y_n+k)}{(N_0+n+1)(N_0+n+2)\ldots(N_0+n+k)} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n + 1 \end{cases}$$

ou encore

$$Z_{n+1} = \begin{cases} Z_n \cdot \frac{N_0+n}{N_0+n+k} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n \\ Z_n \cdot \frac{N_0+n}{N_0+n+k} \cdot \frac{Y_n+k}{Y_n} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n + 1 \end{cases}.$$

Le calcul pour en déduire que (Z_n) est bien une martingale en utilisant la question 1 est laissé en exercice.
En particulier, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_0] = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k-1)}$$

car $Y_0 = a$ (il y a a boules blanches à l'instant initial). De plus, on a $Y_n = Un + o(n)$ p.s. et, pour toute suite (y_n) et tout réel u tels que $y_n = un + o(n)$, on a

$$\frac{y_n(y_n+1)\ldots(y_n+k-1)}{N_0(N_0+1)\ldots(N_0+k-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u^k,$$

donc Z_n converge p.s. vers U^k. Comme $Z_n \in [0,1]$ pour tout n, on en déduit par convergence dominée que

$$\mathbb{E}[U^k] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_0] = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}.$$

5. Soit X une v.a. réelle bornée et $c > 0$ telle que $|X| \leq c$ p.s. Soit ϕ_X la fonction caractéristique de X, i.e., pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$. On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 0} \frac{(itX)^n}{n!}\right].$$

Or on a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(itX)^n}{n!} \xrightarrow[N\to\infty]{p.s.} \sum_{n\geq 0} \frac{(itX)^n}{n!}$$

et cette convergence est dominée par la constante $e^{|t|c}$. Donc par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\phi_X(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}[X^n].$$

Comme U est à valeurs dans $[0,1]$, sa fonction caractéristique ϕ_U se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ comme décrit ci-dessus. Les $\mathbb{E}[U^k]$ pour $k \geq 1$ décrivent donc complètement la fonction caractéristique de U, qui elle même caractérise la loi de U.

Remarque Plus précisément, la loi de U est la loi $\beta(a,b)$ de densité

$$\frac{1}{B(a,b)} u^{a-1}(1-u)^{b-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(u)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Il suffit pour le vérifier de calculer les moments de la loi $\beta(a,b)$ et de vérifier qu'ils coïncident avec le résultat de la question 4, ce qui est laissé en exercice au lecteur courageux (ou muni d'un logiciel de calcul).

Exercice 3 (Théorème de Rademacher)
Le but de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad Z_n = 2^n \left(f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n) \right).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X).$$

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$).
3. Montrer que (Z_n) converge p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire Z, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $Z = g(X)$ p.s..
4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s. :

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

1. On remarque que, pour $0 \leq k \leq n$, $X_k = 2^{-k}\lfloor 2^k X_n \rfloor$. On peut l'écrire proprement, ou faire un dessin pour s'en convaincre... Ainsi, pour $0 \leq k \leq n$, X_k est $\sigma(X_n)$-mesurable. On en déduit que $\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n)$.
   De plus, pour tout $n \geq 0$, par définition de X_n, on sait que X_n est $\sigma(X)$-mesurable. Ainsi, on a l'inclusion
$$\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) \subset \sigma(X).$$
   Enfin, X_n converge p.s. vers X quand n tend vers l'infini, donc X est $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$-mesurable pour tout $n \geq 0$. Ainsi, on obtient l'inclusion réciproque
$$\sigma(X) \subset \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

2. Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable continue. Alors h est bornée sur $[0,1]$ donc $h(X_n)$ est intégrable pour tout n. On a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X_n = k/2^n}\right] &= \mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X \in [k/2^n, (2k+1)/2^{n+1}[}\right] + \mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X \in [(2k+1)/2^{n+1}, (k+1)/2^n[}\right] \\ &= 2^{-(n+1)}\left(h\left(\frac{k}{2^n}\right) + h\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right). \end{aligned}$$
   On en déduit
$$\mathbb{E}\left[h(X_{n+1}) \mid X_n\right] = \frac{h(X_n)}{2} + \frac{h\left(X_n + 2^{-(n+1)}\right)}{2}.$$

Pour tout $n \geq 0$, la variable Z_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, et $|Z_n| \leq L$ donc Z_n est intégrable. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= 2^{n+1}\mathbb{E}\left[f(X_{n+1}+2^{-(n+1)}) - f(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= 2^{n+1}\mathbb{E}\left[f(X_{n+1}+2^{-(n+1)}) - f(X_{n+1}) \mid X_n\right] \\
&= 2^{n}\left(f(X_n+2^{-(n+1)}) - f(X_n) + f(X_n+2^{-n}) - f(X_n+2^{-(n+1)})\right) \\
&= Z_n\,,
\end{aligned}$$

en utilisant à la deuxième ligne la première égalité de tribus de la question 1. Donc $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale bornée par L.

3. D'après la question 2, on sait que (Z_n) est une martingale bornée dans L^p pour tout $p > 0$, donc (Z_n) converge p.s. et dans L^1. On note Z sa limite. Pour tout $n \geq 0$, Z_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ donc Z est mesurable par rapport à la tribu $\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$. D'après la question 1, Z est ainsi $\sigma(X)$-mesurable. Il existe donc une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne telle que $Z = g(X)$. De plus, Z étant bornée par L, on peut choisir g bornée (en prenant remplaçant g par $g \wedge L$ par exemple).
4. Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. La variable $h(X)$ est intégrable et on a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$\mathbb{E}\left[h(X)\mathbb{1}_{X_n = k2^{-n}}\right] = \mathbb{E}\left[h(X)\mathbb{1}_{X\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[}\right] = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} h(x)\mathrm{d}x.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[h(X) \mid X_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} h(x)\mathrm{d}x.$$

La $(\mathcal{F}_n)$-martingale $(Z_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. et dans L^1 vers Z, donc $Z_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$ pour tout $n \geq 0$. On a donc p.s.

$$Z_n = \mathbb{E}[g(X)|X_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$

5. D'après la question 4., pour tout $n \geq 0$,

$$f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n) = \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u \quad \text{p.s.}$$

Donc, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n}) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u$$

puis, en sommant, pour tout $0 \leq k \leq 2^n$,

$$f(k2^{-n}) = f(0) + \int_0^{k2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u\,.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f\left(2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor\right) = f(0) + \int_0^{2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor} g(u)\mathrm{d}u$$

et en faisant tendre n vers l'infini, par continuité de f on obtient

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u.$$

Exercice 4 (Processus de Galton–Watson surcritique)
Soit μ une loi sur $\mathbb{N}$ telle que $\sum_i i\mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2\mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ. On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.
3. On pose $M_n = m^{-n}X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞.
4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \to M_\infty$ dans L^2.
5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q. En déduire que $q = p$. Qu'est-ce-que cela signifie sur la croissance de X_n ?

Solution de l'exercice 4

1. Supposons qu'une population évolue de la manière suivante : à chaque génération n, les individus se reproduisent indépendamment des générations précédentes et les uns des autres, de telle manière que le nombre d'enfants d'un individu a pour loi μ. Alors le processus X décrit le nombre d'individus à la génération n.
2. Dire que $p_{n+1} = 0$ revient à dire qu'il existe i tel que le premier individu a eu i enfants (ce qui arrive avec proba $\mu(i)$), et chacun de ces i enfants n'a pas de descendant à la génération n (ce qui arrive avec proba p_n pour chaque enfant). Par conséquent, on a

$$p_{n+1} = \sum_i \mu(i)p_n^i = f(p_n),$$

avec $f(x) = \sum_i \mu(i)x^i$. On sait de plus que $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$, donc p est un point fixe de f. De plus, f est croissante (les $\mu(i)$ sont positifs), donc si p' est un point fixe de f, on a par récurrence $p_n \leq p'$ pour tout n, donc $p \leq p'$. On en déduit que p est le plus petit point fixe de f, donc montrer que $p < 1$ revient à montrer que f admet un point fixe strictement inférieur à 1. Or, on a $f(1) = 1$ et $f'(1) = m > 1$, donc $f(x) < x$ pour x assez proche de 1. Mais on a aussi $f(0) \geq 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires f admet un point fixe dans $[0, 1[$, donc $p < 1$.
3. Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les $Z_{k,i}$ pour $k \leq n-1$. Alors X_n ne dépend que des $Z_{k,i}$ avec $k \leq n-1$ et $i \in \mathbb{N}$, donc X est $(\mathcal{F}_n)$-adapté, donc M aussi. De plus, comme M est positif, on peut faire le calcul suivant sans savoir M_n et M_{n+1} sont intégrables :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= m^{-(n+1)}\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&= m^{-(n+1)}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}\middle|\mathcal{F}_n\right] \\
&= m^{-(n+1)}\sum_{i=1}^{X_n}\mathbb{E}[Z_{n,i}|\mathcal{F}_n] \\
&= m^{-(n+1)}\sum_{i=1}^{X_n} m \\
&= m^{-(n+1)}mX_n \\
&= M_n.
\end{aligned}$$

En particulier, on en déduit que $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] < +\infty$ pour tout n, et M est une martingale positive, donc elle converge p.s..

4. Notons σ^2 la variance de la loi μ. Pour tout n, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right] &= m^{-2(n+1)}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}\right)^2 \Big|\mathcal{F}_n\right] \\
&= m^{-2(n+1)} \sum_{i,j=1}^{X_n} \mathbb{E}\left[Z_{n,i}Z_{n,j}\right] \\
&= m^{-2(n+1)} \left(\sum_{i=1}^{X_n} \mathbb{E}\left[Z_{n,i}^2\right] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}\left[Z_{n,i}\right]\mathbb{E}\left[Z_{n,j}\right]\right) \\
&= m^{-2(n+1)} \left((m^2+\sigma^2)X_n + m^2 X_n(X_n-1)\right) \\
&= M_n^2 + \frac{\sigma^2}{m^{2(n+1)}} M_n.
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance des deux côtés, on obtient

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2\right] = \mathbb{E}\left[M_n^2\right] + \frac{\sigma^2}{m^{2(n+1)}}\mathbb{E}\left[M_n\right] = \mathbb{E}\left[M_n^2\right] + \frac{\sigma^2}{m^{n+2}}.$$

Comme $\sum_n \frac{\sigma^2}{m^{n+2}} < +\infty$, on en déduit que $\mathbb{E}\left[M_n^2\right]$ est borné, donc M est bornée dans L^2, donc elle converge dans L^2.

5. On dit qu'un individu x est à *descendance lente* si le nombre de descendants de x après n générations est $o(m^n)$. En particulier, un individu dont la descendance s'éteint est à descendance lente, et q est la probabilité que l'individu de départ soit à descendance lente.

   Dire que l'individu de départ a une descendance lente revient à dire qu'il existe i tel qu'il a i enfants, et chacun d'eux a une descendance lente. De même que dans la question 2, la probabilité que cela arrive vaut $\sum_i \mu(i)q^i = f(q)$, donc $q = f(q)$. Or, μ est une série entière à coefficients positifs, et il y a au moins un $i \geq 2$ tel que $\mu(i) > 0$, donc f est strictement convexe, donc elle a au plus deux points fixes. Comme p et 1 sont deux points fixes de f, on a donc soit $q = p$, soit $q = 1$. Mais dans le second cas, on a $M_\infty = 0$ p.s.. C'est absurde car M_n converge vers M_∞ dans L^2, donc aussi dans L^1, et $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] = 1$ pour tout n. On a donc $q = p$. Cela signifie que presque sûrement, soit le processus X s'éteint, soit X_n est asymptotiquement équivalent à m^n fois une variable aléatoire strictement positive.

Remarque On a utilisé la convergence L^2 pour montrer une convergence L^1. Il est naturel de se demander si la convergence L^1 de M reste vraie si μ n'est plus de carré intégrable. Le théorème de Kesten–Stigum affirme que M converge dans L^1 vers M_∞ si et seulement si

$$\sum_i i \log i \, \mu(i) < +\infty.$$

Pour une preuve du théorème de Kesten–Stigum, voir par exemple le chapitre 12.2 de Probability on trees and networks, de Lyons et Peres.

Exercice 5 (Propriété de Liouville)
Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins) et $h : V \to \mathbb{R}$. On dit que h est *harmonique sur* G si pour tout $x \in V$, on a

$$h(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y\sim x} h(y),$$

où la somme est effectuée sur les voisins y de x et où $\deg(x)$ est le nombre de ces voisins. On dit que G vérifie la *propriété de Liouville* si toute fonction bornée harmonique sur G est constante.

1. Montrer que si h est harmonique et (X_n) est une marche aléatoire simple sur G, alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que si la marche aléatoire simple sur G est récurrente (i.e. si elle visite presque sûrement tous les points une infinité de fois), alors G vérifie la propriété de Liouville.
3. Soient $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d x_i \equiv \sum_{i=1}^d y_i \pmod 2$. Montrer qu'il existe (X_n) et (Y_n) deux marches aléatoires simples (non indépendantes !) issues respectivement de x et y telles que p.s., pour n assez grand, $X_n = Y_n$.
4. En déduire que $\mathbb{Z}^d$ vérifie la propriété de Liouville.
5. Donner un exemple de graphe (connexe, localement fini) ne vérifiant pas la propriété de Liouville.

Indication : Pour la question 3, commencer par le cas $d = 1$ puis essayer d'adapter à d quelconque.

Solution de l'exercice 5

1. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Conditionnellement à $\mathcal{F}_n$, le sommet X_{n+1} est uniforme parmi les voisins de X_n, donc $\mathbb{E}\left[h(X_{n+1})|\mathcal{F}_n\right]$ est la moyenne de h sur les voisins de X_n, c'est-à-dire X_n car h est harmonique.
2. Soit h harmonique bornée sur G. Soient $x, y \in V$ et (X_n) une marche aléatoire simple issue de x. Alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale, donc elle converge p.s. Or, elle visite une infinité de fois x et y, donc elle prend une infinité de fois les valeurs $h(x)$ et $h(y)$, donc $h(x) = h(y)$, et ce pour tous x et y. La fonction h est donc constante, donc G est Liouville.
3. Dans le cas $d = 1$, l'idée est de faire démarrer deux marches aléatoires indépendantes $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ issues de x et y. Par récurrence de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ (plus la condition de parité), le temps $\tau_1 = \inf\{n|\widetilde{X}_n = \widetilde{Y}_n\}$ est fini p.s. On prend alors $X = \widetilde{X}$ ainsi que $Y_n = \widetilde{Y}_n$ pour $n \leq \tau_1$ et $Y_n = \widetilde{X}_n$ pour $n \geq \tau_1$.

   Dans le cas général, il faut "coupler les coordonnées une par une" : on démarre deux marches indépendantes de x et y, et on note τ_1 le premier temps où leurs coordonnées selon e_1 coïncident. À partir de τ_1, on applique la stratégie du cas $d = 1$ pour que les coordonnées selon e_1 restent les mêmes pour $n \geq \tau_1$. Puis on attend τ_2, le premier temps où les coordonnées selon e_2 coïncident, et ainsi de suite.

   Les détails sont laissés en exercice, vous pouvez aussi venir me voir au bureau V2.
4. Soit h harmonique bornée sur G et soient x, y, X et Y comme dans la question précédente. Alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ et $(h(Y_n))_{n\geq 0}$ sont deux martingales bornées, donc elles convergent p.s. et dans L^1 vers respectivement X_∞ et Y_∞. Comme $X_n = Y_n$ pour n assez grand, on a $X_\infty = Y_\infty$ p.s. Par convergence L^1, on peut donc écrire

   $$h(x) = \mathbb{E}\left[X_\infty\right] = \mathbb{E}\left[Y_\infty\right] = h(y),$$

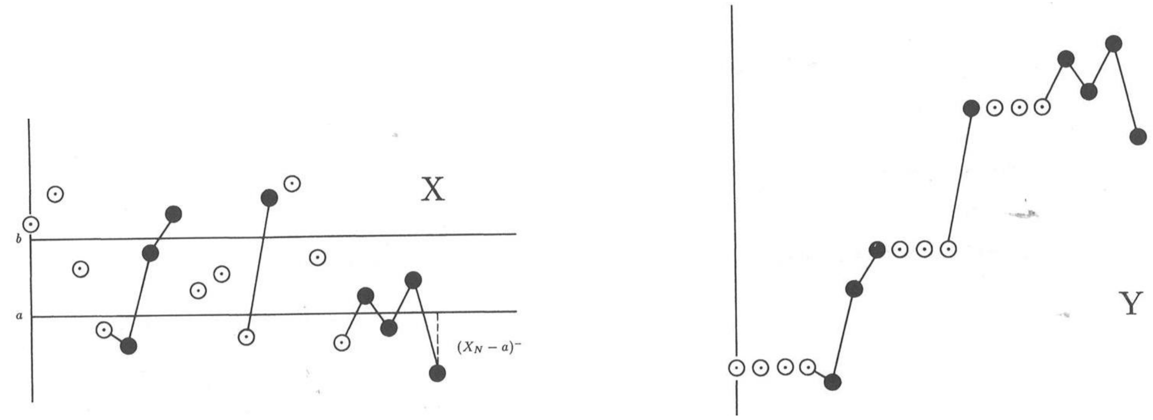
   donc h est constante sur $\{x \in \mathbb{Z}^d | \sum_{i=1}^d x_i \equiv 0 \pmod 2\}$, et il est facile d'en conclure que h est constante sur V.
5. Considérer l'arbre binaire infini. La marche aléatoire est transiente (car la "hauteur" augmente de 1 avec proba $\frac{2}{3}$ et diminue de 1 avec proba $\frac{1}{3}$), donc à partir d'un certain rang elle reste soit dans la moitié gauche de l'arbre, soit dans la moitié droite. On peut alors poser

   $$h(x) = \mathbb{P}\left(\text{la marche aléatoire issue de } x \text{ finit dans la moitié gauche de l'arbre}\right).$$

   On vérifie facilement que h est harmonique et bornée (par 1). De plus, si x est "très haut" dans la moitié gauche de l'arbre, il a une très faible probabilité de redescendre jusqu'à la racine, donc $h(x)$ est proche de 1. Les détails sont laissés en exercice.

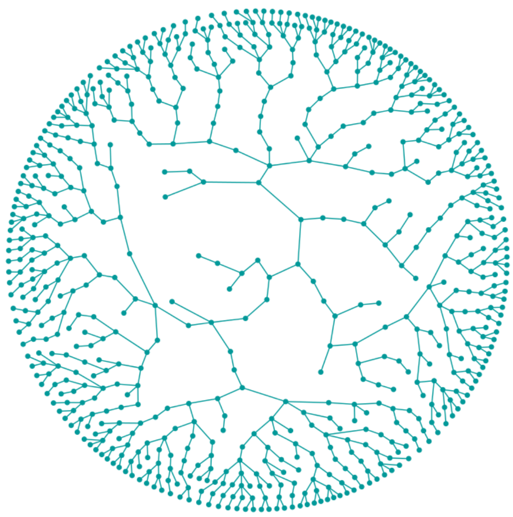
2 Une image intéressante ET une jolie image

Exercice 6
Quel est le rapport entre l'image suivante et le théorème de convergence des martingales ?



Solution de l'exercice 6
Il s'agit de la preuve du lemme des montées de Doob. Ici, X est une martingale (par exemple, le cours d'une action), et Y est le gain réalisé par un individu qui achète et vend des actions selon la stratégie suivante : dès que le cours descend en-dessous de a il achète une action, dès qu'il remonte au-dessus de b il la revend et ainsi de suite. Notre boursicoteur gagne au moins $(b - a)$ par montée de X entre a et b, et perd au plus $(X_n - a)^-$, qui est d'espérance bornée par hypothèse. Comme Y est une martingale, l'espérance des gains est égale à l'espérance des pertes, donc le nombre de montées est aussi d'espérance bornée quand $n \to +\infty$.

Exercice 7
Que représente la jolie image ci-dessous ?



Solution de l'exercice 7 Il s'agit d'un arbre de Galton–Watson surcritique. Chaque sommet représente un des individus considérés dans l'exercice 5, et on relie en plus chaque individu à son parent. Le processus X_n décrit alors le nombre de sommets à distance n de la racine dans l'arbre. Ici, on a pris $\mu(0) = \mu(3) = \frac{1}{8}$ et $\mu(1) = \mu(2) = \frac{3}{8}$, de sorte que $m = \frac{3}{2} > 1$, et on voit bien la croissance exponentielle. L'image vient de la page suivante, qui contient aussi des vidéos montrant comment l'arbre croît :

`http://images.math.cnrs.fr/La-probabilite-d-extinction-d-une`