Corrigé du TD1 : Le langage des catégories

Exercice 1. Premiers exemples ⋆

1. Soit Grp la catégorie des groupes. On note Vect_k la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k dont les morphismes sont les applications linéaires. L'association $F : V \mapsto GL(V)$ n'induit pas de foncteur $\mathrm{Vect}_k \to \mathrm{Grp}$. En effet, il n'existe aucune manière de définir une action cohérente de F sur les applications linéaires.

   En revanche, soit Vect'_k la catégorie des k-espaces vectoriels dont les morphismes sont les isomorphismes. L'association $F' : V \mapsto GL(V)$ induit un foncteur $\mathrm{Vect}'_k \to \mathrm{Grp}$ agissant sur un isomorphisme $f : V \to W$ par
$$F'(f) : u \mapsto f \circ u \circ f^{-1} \ .$$

2. L'association $G \mapsto Z(G)$ n'induit pas de foncteur $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Grp}$. En effet, pour $f : G \to H$ un morphisme de groupe, et $x \in G$, on n'a pas nécessairement $f(x) \in Z(H)$.

   En revanche, soit $x \in Z(G)$ et supposons que f soit surjectif. Pour tout $y \in H$, il existe $y' \in G$ tel que $f(y') = y$ et
$$f(x)y = f(x)f(y') = f(xy') = f(y'x) = yf(x) \ ,$$
   et donc $f(x) \in Z(H)$. Soit Grp' la catégorie des groupes munie des morphismes surjectifs. L'application $G \mapsto Z(G)$ induit un foncteur $\mathrm{Grp}' \to \mathrm{Grp}$ agissant sur un morphisme surjectif $f : G \to H$ par $f \mapsto f_{|Z(G)}$.

3.
   - Dans le cas où $\mathsf{C} = \mathrm{Top}$ et $S = \{*\}$, la catégorie $S\backslash\mathsf{C}$ est la catégorie Top^* des espaces topologiques pointés. Ses objets sont les couples (X, x) où X est un espace topologique et $x \in X$. Les morphismes d'espaces topologiques pointés de (X, x) vers (Y, y) sont les applications continues $\varphi : X \to Y$ telles que $\varphi(x) = y$.
   - Dans le cas où $\mathsf{C} = \mathrm{Ann}$ et $S = A \in \mathsf{ob}\ \mathsf{C}$, la catégorie $A\backslash\mathsf{C}$ est la catégorie Alg_A des A-algèbres.

Exercice 2. Morphismes d'une catégorie ⋆

1. $(\Longrightarrow)$
   - Soit $f : A \to B$ un momomorphisme dans les ensembles. Montrons qu'il est injectif. Soient a et b tels que $f(a) = f(b)$. Pour C un autre ensemble, on considère les applications constantes
$$g : C \to A,\ c \mapsto a \quad \text{et} \quad h : C \to A,\ c \mapsto b \ .$$
     Par construction, on a $f \circ g = f \circ h$ et donc $g = h$. On en déduit que $a = b$.
   - Si $f : A \to B$ est un momomorphisme dans les anneaux, on considèrera les applications
$$g : \mathbb{Z}[x] \to A,\ x \mapsto a \quad \text{et} \quad h : \mathbb{Z}[x] \to A,\ x \mapsto b \ .$$

   $(\Longleftarrow)$ On montre le résultat pour la catégorie des ensembles Ens, le raisonnement étant similaire dans les autres cas. Soit $f : A \to B$ une application injective entre deux ensembles. Soient $g, h : C \to A$ deux applications telles que $f \circ g = f \circ h$. Pour tout $c \in C$, on a $f(g(c)) = f(h(c))$ et donc $g(c) = h(c)$ puisque f est injective. On en déduit que $g = h$.

2. $(\Longrightarrow)$
   - Soit $f : A \to B$ un épimorphisme entre deux ensembles. Montrons que f est surjectif, i.e. que $f(A) = B$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $x \in B\backslash f(A)$. Soit $C = \{c, d\}$ un ensemble avec deux éléments distincts. On considère $g : B \to C$ tel que $g(b) = c$ pour tout $b \in B$ et $h : B \to C$ tel que $h(x) = d$ et $h(b) = c$ pour tout $b \neq x$. On a clairement $g \neq h$ mais $g \circ f = h \circ f$, d'où l'absurdité.

- Soit $f : G \to H$ un épimorphisme de groupes. Notons $A = f(G)$ et considérons

$$A/H = \{Ah \mid h \in H\} \ .$$

On note S l'ensemble $A/H \cup \{\rho\}$ où ρ est n'importe quel élément. Considérons $K = \mathrm{Bij}(S)$ l'ensemble des bijections de S. Pour tout $h \in H$, on vérifie que l'application

$$A/H \to A/H, \quad Ah' \mapsto A(h'h)$$

définit une bijection d'inverse $Ah' \mapsto A(h'h^{-1})$. Cela induit une bijection de S, en envoyant $\{\rho\}$ sur lui-même, que note ψ_1^h. L'association $\psi_1 : H \to K$ qui à h associe ψ_1^h est un morphisme.
On note σ l'élément de K qui envoie ρ sur A et A sur ρ et fixe le reste. On définit un morphisme $\psi_2 : H \to K$ en posant

$$\psi_2^h = \sigma^{-1} \circ \psi_1^h \circ \sigma \ ,$$

pour tout $h \in H$. Si $a \in A$, alors ψ_1^a fixe A et $\{\rho\}$ tandis que σ fixe tous les autres éléments de S. Ainsi, σ et ψ_1^a commutent et $\psi_2^a = \psi_1^a$. Par construction, on a $\psi_1 \circ f = \psi_2 \circ f$ et donc $\psi_1 = \psi_2$ puisque f est un épimorphisme. Ainsi, pour tout $h \in H$, le éléments ψ_1^h et σ commutent. Comme ψ_1^h fixe $\{\rho\}$ mais σ échange A et ρ, on en déduit que ψ_1^h fixe A. Par définition, ψ_1^h envoie A sur Ah donc $h \in A$. On en déduit que $A = H$ et que f est surjetive.

Cette démonstration est extraite de : *A Group Epimorphism is Surjective. Linderholm, C. E. (1970). The American Mathematical Monthly, 77(2), 176–177.*

($\Longleftarrow$) On montre le résultat pour la catégorie des ensembles Ens, le raisonnement étant similaire dans le cas des groupes. Soit $f : A \to B$ une application surjective. Soient $g, h : B \to C$ deux applications telles que $g \circ f = h \circ f$. Pour tout $b \in B$, soit $b' \in A$ tel que $f(b') = b$. Alors $g(b) = h(b)$ puisque $g \circ f(b') = h \circ f(b')$. On en déduit que $g = h$.

3. L'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ n'est pas surjective mais il s'agit d'un épimorphisme. En effet, soit A un anneau et soient $h, g : \mathbb{Q} \to A$ telles que $g \circ i = h \circ i$, i.e. g et h coincident sur $\mathbb{Z}$. Alors pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a

$$g(\tfrac{p}{q}) = g(p)g(q)^{-1} = h(p)h(q)^{-1} \ .$$

Exercice 3. Transformations naturelles entre foncteurs ⋆⋆

1. Pour tout $R \in \mathrm{Ann}$, on définit $\Phi(R)$ par l'application

$$Gl_n(R) \to R^\times, \quad A \mapsto \det(A) \ .$$

On vérifie que $\{\Phi(R)\}$ induit une transformation naturelle $\Phi : G \implies F$, i.e. pour tout $f : R \to S$ morphisme d'anneaux, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} Gl_n(R) & \xrightarrow{G(f)} & Gl_n(S) \\ {\scriptstyle \Phi(R)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi(S)} \\ R^\times & \xrightarrow[F(f)]{} & S^\times \end{array}$$

Soit $A = (a_{i,j}) \in Gln(R)$. On a

$$f(\det(A)) = f\left(\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\right) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} f(a_{\sigma(i),i}) \ ,$$

puisque f est un morphisme d'anneaux et donc $f(\det(A)) = \det(G(f)(A))$.

2. Soit V un espace vectoriel. Pour tout $b \in V$, on définit $\mathrm{ev}_b \in V^{**}$ comme l'application qui à $\varphi \in V^*$ associe $\varphi(b)$. On vérifie que l'application $\Psi(V) : V \to V^{**}$ définie par $b \mapsto \mathrm{ev}_b$ induit une transformation naturelle $\Psi : id \to D$. Soit $f : V \to U$ une application linéaire entre espaces vectoriels. On vérifie que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi(V)"'] & U \arrow[d, "\Psi(U)"] \\ V^{**} \arrow[r, "f^{**}"'] & U^{**} \end{tikzcd}$$

Soit $b \in V$ et soit $\varphi \in U^{**}$. On a

$$(\Psi(U) \circ f(b))\,(\varphi) = \mathrm{ev}_{f(b)}(\varphi) = \varphi(f(b))$$

et

$$(f^{**} \circ \Psi(V))\,(\varphi) = f^{**} \circ ev_b = ev_b \circ f^*(\varphi) = \varphi(f(b))\ .$$

Exercice 4. Le lemme de Yoneda $\star\star$

1. On vérifie que l'application

$$\mathcal{S}_X^F : \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(h^X, F) \longrightarrow F(X)\ , \quad \Phi \longmapsto \Phi(X)(\mathrm{id}_X)$$

est une bijection d'inverse

$$\mathcal{T}_X^F : F(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(h^X, F)\ , \quad x \longmapsto \mathcal{T}_x\ ,$$

où $\mathcal{T}_x(Y) : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y) \to F(Y)$ est définit par $f \mapsto F(f)(x)$ pour tout objet Y de C.
En effet, pour tout $x \in F(X)$, on a

$$\mathcal{S}_X^F \circ \mathcal{T}_X^F(x) = \mathcal{T}_x(X)(\mathrm{id}_X) = F(\mathrm{id}_X)(x) = x\ .$$

Inversement, soit $\Phi : h^X \implies F$ une transformation naturelle et soit Y un object de C. On a que

$$\mathcal{T}_X^F \circ \mathcal{S}_X^F(\Phi)(Y) = \mathcal{T}_X^F \circ \Phi(X)(\mathrm{id}_X)(Y)$$

est l'application qui à $f : X \to Y$ associe $F(f)(\Phi(X)(\mathrm{id}_X))$. Hors, par hypothèse Φ est une transformation naturelle et

$$F(f) \circ \Phi(X) = \Phi(Y) \circ f_*\ .$$

On obtient que $F(f)(\Phi(X)(\mathrm{id}_X)) = \Phi(Y)(f)$, et $\mathcal{T}_X^F \circ \mathcal{S}_X^F(\Phi) = \Phi$.

Naturalité en F
Soit $G : \mathsf{C} \to \mathsf{Ens}$ un second foncteur et soit $\Psi : F \implies G$ une transformation naturelle. Elle induit une application

$$\Psi_* : \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(h^X, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(h^X, G), \quad \Phi \mapsto \Psi \circ \Phi\ ,$$

où $\Psi \circ \Phi$ est la transformation naturelle $h^X \implies G$ donnée par $\Psi \circ \Phi(Y) = \Psi(Y) \circ \Phi(Y)$ pour tout objet Y de C. On vérifie alors que le diagramme suivant est commutatif,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(h^X, F) \arrow[r, "\mathcal{S}_X^F"] \arrow[d, "\Psi_*"'] & F(X) \arrow[d, "\Psi(X)"] \\ \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(h^X, G) \arrow[r, "\mathcal{S}_X^G"'] & G(X) \end{tikzcd}$$

puisque pour tout pour tout $\Phi : h^X \implies F$, on a

$$\Psi(X) \circ \mathcal{S}_X^F(\Phi) = \Psi(X) \circ \Phi(X)(\mathrm{id}_X) = (\Psi \circ \Phi)(X)(\mathrm{id}_X) = \mathcal{S}_X^G(\Psi \circ \Phi)\ .$$

2. D'après la question précédente appliquée à $F = h^Y$, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, X) \cong \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathsf{C}}}(h^X, h^Y) \ ,$$

qui à $\xi : Y \to X$ associe la transformation naturelle ξ^* définie par

$$\xi^*(Z) : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, Z), \quad f \mapsto f \circ \xi \ ,$$

pour tout objet Z de C. Le morphisme ξ est un isomorphisme si et seulement si $\xi^*(Z)$ est un isomorphisme pour tout objet Z de C. On en déduit que deux objets X et Y sont isomorphes dans C si et seulement si h^X et h^Y sont naturellement isomorphes.

Exercice 5. Groupoïde ⋆⋆⋆

1. Soit $X \in \mathcal{G}$. On a $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$ par définition de la catégorie. La loi de composition est donnée par la composition des morphismes dans la catégorie $\mathcal{G}$. L'identitée id_X est naturellement l'élément neutre pour cette loi. Par hypothèse sur $\mathcal{G}$, tout morphisme est inversible, i.e. pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$, il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$ tel que
$$f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_X \ .$$
On obtient ainsi une loi de groupe sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$.
2. Soient X et Y sont deux objets de $\mathcal{G}$ tels que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, Y) \neq \varnothing$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ qui est inversible d'inverse f^{-1} par hypothèse. On a alors un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(Y, Y)$ donné par $u \mapsto f \circ u \circ f^{-1}$. Son inverse est donné par $v \mapsto f^{-1} \circ v \circ f$.
3. On fixe X un objet de $\mathcal{G}$. Pour tout $Y \in \mathrm{ob}\, \mathcal{G}$, le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ est non vide puisque $\mathcal{G}$ est connexe et on fixe $\lambda_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, Y)$. Dans le cas $Y = X$, on impose $\lambda_Y = \mathrm{id}_X$. On veut construire deux foncteurs
$$F : B\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X) \to \mathcal{G} \quad \text{et} \quad G : \mathcal{G} \to B\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$$
tels que l'on ait des isomorphismes $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$ et $G \circ F \cong \mathrm{id}_{B\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,X)}$. On définit le foncteur F par $F(\bullet) = X$ et $F(u) = u$ pour $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$. On définit le foncteur G par $G(Y) = \bullet$ pour tout objet Y de $\mathcal{G}$ et par
$$G(u) = \lambda_Z^{-1} \circ u \circ \lambda_Y$$
pour tout $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(Y, Z)$. Par construction, on a $G \circ F = \mathrm{id}_{B\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,X)}$. On est donc ramenés à montrer que $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$. Pour tout objet Y de $\mathcal{G}$, on a $F \circ G(Y) = X$ et pour tout $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(Y, Z)$, on a
$$F \circ G(u) = \lambda_Z^{-1} \circ u \circ \lambda_Y \ .$$
Pour tout objet Y de $\mathcal{G}$, on définit un isomorphisme $\Phi(Y) : F \circ G(Y) \to Y$ comme étant $\lambda_Y : X \to Y$. On vérifie que cela définit bien une transformation naturelle puisque diagramme suivant est commutatif
$$\begin{tikzcd} F \circ G(Y) \arrow[r, "\lambda_Z^{-1} \circ u \circ \lambda_Y"] \arrow[d, "\lambda_Y"'] & F \circ G(Z) \arrow[d, "\lambda_Z"] \\ Y \arrow[r, "u"'] & Z \end{tikzcd}$$
pour tout morphisme $u : Y \to Z$ dans $\mathcal{G}$.
4. Soit $[\lambda] \in \mathrm{Hom}_{\pi(M)}(x, y)$ un morphisme dans la catégorie $\pi(M)$ représenté par un chemin $\lambda : [0, 1] \to M$ tel que $\lambda(0) = x$ et $\lambda(1) = y$. Alors $[\lambda]$ est inversible d'inverse $\left[\lambda^{-1}\right]$, où λ^{-1} est l'inverse de λ définit par
$$\lambda^{-1} : [0, 1] \to M, \ t \mapsto \lambda(1 - t) \ .$$
On note que si $x \in M$, alors $\mathrm{Hom}_{\pi(M)}(x, x)$ correspond au groupe fondamental $\pi_1(M, x)$.
5. Dans le cas d'un groupoïde connexe, il existe un élément $X \to Y$ pour tous objet X et Y. Si le groupoïde fondamental $\pi(M)$ est connexe alors deux points de l'espace topologique sont toujours reliés par un chemin, i.e. l'espace M est connexe par arcs.

Exercice 6. Fonteurs représentables ⋆⋆⋆

1. On veut montrer que $\mathcal{U}$ est représentable, c'est-à-dire qu'il existe $X \in \mathrm{Top}$ tel que $\mathcal{U}$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X,-)$. On considère $X = \{*\}$ muni de la topologie discrète. On définit un isomorphisme de foncteur $\Phi : h^X \to \mathcal{U}$ de la façon suivant. Pour tout $Y \in \mathrm{Top}$, on a un isomorphisme

$$\Phi(Y) : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\{*\}, Y) \to Y, \quad u \mapsto u(*) \ .$$

Cela détermine bien une transformation naturelle puisque pour toute application continue $f : Y \to Z$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\{*\}, Y) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\Phi(Y)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\{*\}, Z) \arrow[d, "\Phi(Z)"] \\
Y \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

puisque pour tout $u : \{*\} \to Y$, on a $(f \circ \Phi(Y))(u) = f \circ u(*) = \Psi(Z) \circ f \circ u$.

2. On pose $X = A[X_1, \ldots, X_n]$ et pour toute A-algèbre B, on considère l'application

$$\Psi(B) : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_A}(A[X_1, \ldots, X_n], B) \to B^n, \quad k \mapsto (k(X_1), \ldots k(X_n)) \ .$$

Un morphisme $k \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_A}(A[X_1, \ldots, X_n], B)$ est uniquement déterminé par son image sur $X_1, \ldots X_n$ donc $\Psi(B)$ est injectif. De même, pour tout $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$, il existe un unique $k : A[X_1, \ldots, X_n] \to B$ telle que $k(x_i) = b_i$. Ainsi, $\Psi(B)$ est un isomorphisme. Il reste à vérifier que Ψ définit bien une transformation naturelle. Soit $f : B \to C$ un morphisme de A-algèbres. On vérifie que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_A}(A[X_1, \ldots, X_n], B) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\Psi(B)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_A}(A[X_1, \ldots, X_n], C) \arrow[d, "\Psi(C)"] \\
B^n \arrow[r, "F(f)"'] & C^n
\end{tikzcd}$$

puisque pour tout $k : A[X_1, \ldots, X_n] \to B$, on a

$$F(f) \circ \Phi(Y)(k) = (f \circ k(X_1), \ldots, f \circ k(X_n)) = \Phi(C) \circ f_*(k) \ .$$

3. On pose $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et pour tout groupe G, on considère l'application

$$\Phi(G) : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \to G_n, \quad \varphi \mapsto \varphi(1) \ .$$

Il s'agit d'un isomorphisme puisque pour tout $g \in G_n$, il existe une unique application $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G$ caractérisée par $\varphi(1) = g$. Il reste à vérifier que Φ définit bien une transformation naturelle. Soit $h : G \to H$ un morphisme de groupe. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\Phi(G)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, H) \arrow[d, "\Phi(H)"] \\
G_n \arrow[r, "G(f)"'] & H_n
\end{tikzcd}$$

puisque pour tout $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G$, on a $G(f) \circ \Phi(G)(\varphi) = f \circ \varphi(1) = \Phi(H) \circ f \circ \varphi$.