# Corrigé du TD10 : Homologies singulière et cellulaire

## Exercice 1. Calculs d'homologie singulière ⋆

1. Bouquet d'espaces. Soient $(X, x_0)$ et $(Y, y_0)$ deux espaces topologiques correctement pointés. Soient $U$ et $V$ des ouverts de $X$ et $Y$ qui sont des voisinages se rétractant par déformation forte sur $x_0$ et $y_0$ respectivement. Alors $\{X \vee V, U \vee Y\}$ est un recouvrement ouvert de $X \vee Y$. Par ailleurs, $X \vee V$ et $U \vee Y$ ont le même type d'homotopie que $X$ et $Y$ respectivement et $X \vee V \cap U \vee Y$ est contractile. Ainsi, la suite exacte longue de Mayer-Vietoris donne pour $k \geq 2$ :

$$0 \to H_k(X) \oplus H_k(Y) \to H_k(X \vee Y) \to 0,$$

et en degré inférieur à 2, on a :

$$0 \to H_1(X) \oplus H_1(Y) \to H_1(X \vee Y) \to H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{(1)} H_0(X) \oplus H_0(Y) \to H_0(X \vee Y) \to 0$$

On sait par ailleurs (voir l'exercice 2. TD8) que (1) est injective, ainsi on a les deux suites exactes courtes :

$$0 \to H_1(X) \oplus H_1(Y) \to H_1(X \vee Y) \to 0,$$

et

$$0 \to H_0(\{x_0\}) \to H_0(X) \oplus H_0(Y) \to H_0(X \vee Y) \to 0.$$

2. Suspension. Soit $X$ un espace topologique. Soient $U$ et $V$ les images de $X \times [0, \frac{3}{4}]$ et $X \times [\frac{1}{4}, 1]$ respectivement dans $SX$. Alors $\{U, V\}$ est un recouvrement ouvert de $SX$, $U$ et $V$ sont contractiles et leur intersection a le même type d'homotopie que $X$. Par Mayer-Vietoris, $H_k(SX) \simeq H_{k-1}(X)$ pour $k \geq 2$ et comme la suspension est connexe par arcs, on a $H_0(SX) = \mathbb{Z}$. Par ailleurs, la suite de Mayer Vietoris donne en degré 0 et 1 :

$$0 \to H_1(SX) \to H_0(X) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(SX).$$

On écrit $X$ comme la réunion disjointe de ses composantes connexes par arcs $X_\alpha$ et on a donc $H_0(X) = \oplus_\alpha \mathbb{Z} t_\alpha$, chaque $t_\alpha$ s'envoie alors sur $(1, 1)$. Ainsi

$$H_1(SX) \simeq \{\sum_\alpha x_\alpha t_\alpha, \sum_\alpha x_\alpha = 0\}.$$

3. Tore et bouquets de sphères

En utilisant la première question, le bouquet $B$ a pour groupes d'homologie $H_0(B) = \mathbb{Z}$, $H_1(B) = H_1(\mathbb{S}^1) \oplus H_1(\mathbb{S}^1) \oplus H_1(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}^2$ et $H_2(B) = H_2(\mathbb{S}^1) \oplus H_2(\mathbb{S}^1) \oplus H_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$.

En ce qui concerne le tore $\mathbb{T} \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, il a également ces mêmes groupes d'homologie : on voit $\mathbb{T}$ comme le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ avec les identifications usuelles du bord. On a alors un recouvrement $\{U, V\}$ avec $U = ]0, 1[\times]0, 1[$ et $V$ est le complémentaire du point $(1/2, 1/2)$. On voit que $U$ est contractile, $V$ a le même type d'homotopie que l'image du bord de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans $\mathbb{T}$, à savoir un bouquet de deux cercles, $H_1(V; R)$ est abélien libre à deux générateurs $a, b$ et $U \cap V$ a le type d'homotopie d'un cercle $c$. De plus, l'application $H_1(U \cap V) \to H_1(V)$ envoie $c$ sur $a + b - a - b = 0$.

On applique alors la suite exacte de Mayer-Vietoris à ce recouvrement et on obtient l'homologie à coefficients dans un anneau $R$, on obtient $H_0(\mathbb{T}; R) = R$, $H_1(\mathbb{T}; R) = R \oplus R$, $H_2(\mathbb{T}; R) = R$ et $H_k(\mathbb{T}; R) = 0$ pour $k \geq 3$.

En revanche, ces espaces ne sont pas homotopiquement équivalents car ils n'ont pas le même groupe fondamental : $\pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}^2$ alors qu'une application de Van Kampen montre que $\pi_1(B)$ est le même que celui du bouquet de 2 cercles, à savoir $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

4. La bouteille de Klein On voit la bouteille de Klein $K$ comme le carré $[0,1]\times[0,1]$ avec les identifications usuelles du bord. On a alors un recouvrement $\{U,V\}$ avec $U=]0,1[\times]0,1[$ et $V$ est le complémentaire du point $(1/2,1/2)$.

   On voit que $U$ est contractile, $V$ a le même type d'homotopie que l'image du bord de $[0,1]\times[0,1]$ dans $K$, à savoir un bouquet de deux cercles, $H_1(V,R)$ est abélien libre à deux générateurs $a,b$ et $U\cap V$ a le type d'homotopie d'un cercle $c$. De plus, l'application $H_1(U\cap V)\to H_1(V)$ envoie $c$ sur $2a$.

   On applique alors la suite exacte de Mayer-Vietoris à ce recouvrement et on obtient l'homologie à coefficients dans un anneau $R$, on obtient $H_0(K,R)=R$, $H_1(K,R)=R\oplus R/2R$, $H_2(K,R)=\{x\in R, 2.x=0\}$ et $H_k(K,R)=0$ pour $k\geq 3$. En particulier, si $R=\mathbb{Z}$, on obtient : $H_0(K,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$, $H_1(K,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $H_k=0$ pour $k\geq 2$.

5. L'espace privé d'un cercle On va utiliser Mayer-Vietoris pour l'espace $\mathbb{R}^3$, en prenant pour $U$ un tore plein qui se rétracte par déformation sur un cercle $\mathbb{S}^1$, et pour $V=\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{S}^1$. Alors $U\cap V$ se rétracte par déformation sur un tore $T\simeq\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ dont l'homologie a été calculée ci-dessus.

   Par Mayer-Vietoris, on obtient directement $H_i(\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{S}^1)=0$ pour $i\geq 3$. Ensuite, en petit degré, $\mathbb{R}^3$ étant contractile, on obtient des isomorphismes
$$H_2(T)\simeq H_2(\mathbb{S}^1)\oplus H_2(\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{S}^1)$$
   et
$$H_1(T)\simeq H_1(\mathbb{S}^1)\oplus H_1(\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{S}^1).$$
   Le premier donne $H_2(\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{S}^1)\simeq H_2(T)=\mathbb{Z}$. Pour le deuxième on obtient
$$\mathbb{Z}\oplus H_1(\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{S}^1)\simeq\mathbb{Z}^2.$$
   Ainsi, $H_1(\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{S}^1)$ est un groupe abélien de type fini sans torsion, donc isomorphe à $\mathbb{Z}$.

6. Parachute. Soit $U$ l'intérieur de $\Delta^2$ et $V$ un voisinage ouvert du bord de $\Delta^2$ qui se rétracte par déformation sur le borde de $\Delta^2$ et tel que son intersection avec $U$ soit homotope à un cercle. Notons $\widetilde{V}$ son image dans $P$, le quotient de $\Delta^2$ par ses sommets et remarquons qu'il a le même type d'homotopie qu'un bouquet de trois cercles. Alors $\{U,\widetilde{V}\}$ est un recouvrement ouvert de $P$, et la suite exacte Mayer-Vietoris implique
$$\begin{aligned}0\to H_0(U\cap V)\to H_0(U)\oplus H_0(V)\to H_0(P),&\\ 0\to 0\to 0\oplus 0\to H_k(P)\to 0,\quad \text{pour}\quad k\geq 2,&\\ 0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\to H_1(P)\to 0&\\ 1\mapsto(1,1,1).&\end{aligned}$$

## Exercice 2. Degré d'une application ⋆

1. Soit $f:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ une application continue sans point fixe.
   - *Toute application continue $f:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ sans point fixe est homotope à l'application antipodie, $A:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ définie par $(x_0,\dots,x_n)\mapsto(-x_0,\dots,-x_n)$.*

     Soit $x\in\mathbb{S}^n$. Alors, $f(x)\neq x$ et en particulier les points $-x$ et $f(x)$ ne sont pas opposés sur la sphère. Ainsi le segment reliant $x$ à $f(x)$ ne passe pas par l'origine. On peut ainsi définir l'application suivante $H:\mathbb{S}^n\times[0,1]\to\mathbb{S}^n$ telle que
$$H(x,t)=\frac{(1-t)f(x)-tx}{\|(1-x)f(x)-tx\|}\ .$$
     Il s'agit d'une homotopie entre $f$ et $A$.
   - *L'application antipode $A:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ est de degré $(-1)^{n+1}$.*

     On fixe $(e_1,\dots,e_{n+1})$ une base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $i$, on note $H_{e_i}$ le sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal à $e_i$. La symétrie orthogonale par rapport à $H_{e_i}$ est caractérisée par $S_{e_i}(x_1,\dots,x_{n+1})=(x_1,\dots,-x_i,\dots,x_{n+1})$. On remarque alors que
$$A=S_{e_1}\circ S_{e_2}\circ\cdots\circ S_{e_{n+1}}\ .$$

On conclut avec le point suivant.

- *Toute réflexion orthogonale linéaire de $\mathbb{R}^{n+1}$ induit une application de degré $-1$ sur la sphère $\mathbb{S}^n$.*
Soit $e \in \mathbb{S}^n$. On note $H_e$ le sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal à $e$. La symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $H_e$ est définie par $S_e = x - 2\langle e, x\rangle e$.
La sphère $\mathbb{S}^n$ est connexe par arcs donc il existe un chemin $\gamma$ reliant $e_1$ à $e$. Il permet de construire une homotopie bien définie entre $S_{e_1}$ et $S_e$,
$$H : \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{S}^n, \quad (x,t) \longmapsto x - 2\langle \gamma(t), x\rangle \gamma(t) \ .$$
On est donc ramenés à calculer le degré de $S_{e_1}$ pour tout $n$.
On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, on a $H_0(\mathbb{S}^0; R) = R[\sigma_1] \oplus R[\sigma_{-1}]$ où $-1$ et $1$ sont les deux points de $\mathbb{S}^0$ et $\sigma_1$, $\sigma_{-1}$ les applications constantes $\Delta^0 \to \mathbb{S}^0$ égales à ces points. Alors $H_0(S_{e_1})([\sigma_{-1} - \sigma_1]) = [\sigma_1 - \sigma_{-1}]$ et $S_{e_1}$ est de degré $-1$.
Supposons maintenant que le résultat est vrai pour tout $k < n$. Considérons les ouverts de $\mathbb{S}^n$ suivants,
$$U = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} > -\frac{1}{2}\} \ ,$$
$$V = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} < \frac{1}{2}\} \ .$$
Alors $U$ et $V$ forment un recouvrement de $\mathbb{S}^n$ et chacun se rétracte par déformation sur les pôles $(0, \ldots, 0, 1)$ et $(0, \ldots, 0, -1)$ respectivement. L'ouvert $U \cap V$ se rétracte par déformation sur l'équateur qui est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n+1}$. La suite exacte de Mayer-Vietoris nous donne
$$0 \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0$$
La symétrie $S_{e_1}$ préserve les ouverts $U$ et $V$ et s'insère dans le diagramme commutatif suivant
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "H_n(S_{e_1})"'] & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(S_{e_1})"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "\cong"] & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
On conclut alors par hypothèse de récurrence.

2. Soit $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$, sans point fixe. Alors $f$ est de degré $-1$. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{S}^n$, $f(x) \neq -x$. Alors $A \circ f$ n'a pas de point fixe et est homotope à $A$. Cela implique que le degré de $f$ est 1. D'où la contradiction. Ainsi, il existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x_0) = -x_0$.

   Supposons qu'il existe une application continue, $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$, telle que $x$ est orthogonal à $f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{S}^{2n}$. Cette application ne peut pas avoir de point fixe. En effet, si il existe $x$ tel que $f(x) = x$, alors $\langle f(x), x\rangle = \|x\|^2 = 1$ ce qui est impossible par hypothèse. Avec ce qu'il précède, on en déduit qu'il existe $x_0$ tel que $f(x_0) = -x_0$. Mais, cela implique
$$\langle f(x_0), x_0\rangle = -1$$
   ce qui est encore impossible. Il n'existe donc pas une telle application $f$.

3. On rappelle que $G$ agit librement sur un espace $X$ signifie que pour tout $g \in G$ différent de 1, $g$ agit par un homéomorphisme sans point fixe.

   Soient $g, g'$ deux éléments non-triviaux de $G$. Puisque $G$ agit librement, $g$ et $g'$ induisent des homéomorphismes $g, g' : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ sans points fixes. Ainsi, par la question 2., $\deg g = \deg g' = -1$. Mais alors $\deg(g \circ (g')^{-1}) = 1$, et encore par la question 2., l'homéomorphisme $g \circ (g')^{-1}$ doit avoir un point fixe.

   Puisque $G$ agit librement, cela veut dire que le produit $gg'^{-1}$ est égal à l'élément neutre 1, c'est-à-dire que $g = g'$. Ainsi, nous avons montré que $G$ avait un seul élément non-trivial, donc $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. Champs de vecteurs.
   (a) Si $n$ est impair, $n = 2m-1$, on définit un champ de vecteurs tangents sans singularités en posant pour tout $x = (x_1, \dots, x_{2m}) \in \mathbb{S}^n$, $v_x = (x_2, -x_1, \dots, x_{2m}, -x_{2m-1})$.
   (b) On suppose que $n$ est pair et soit $v$ un champ de vecteurs sans singularité. Alors, on a une application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ bien définie telle que $\langle x, f(x)\rangle = 0$ pour tout $x$ par définition du champ de vecteur. Mais c'est impossible par la question 3.

## Exercice 3. Espaces de Moore ⋆

1. On commence par prendre une 0 cellule et on lui rattache une sphère $\mathbb{S}^n$. On prend une application $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de degré $m$ et on fait un rattachement d'une $n+1$-cellule selon $g$. Le complexe cellulaire obtenu en degré $n+1, n, n-1$ est le suivant
$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} .$$
En calculant l'homologie de ce complexe, on voit bien que l'espace obtenu est un espace de Moore pour $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, n)$.
2. Si $X$ est un espace de Moore de $(G, n)$ et $Y$ un espace de Moore de $(G', n)$, alors le bouquet $X \vee Y$ (selon un sommet pour les structures de CW complexes) est un espace de Moore de $(G \oplus G', n)$. Le résultat découle alors du 1 et du fait que la sphère en dimension $n$ est un espace de Moore de $(\mathbb{Z}, n)$.
3. Soit $(g_i)_{i\in I}$ une famille de générateurs de $G$. On a une suite exacte courte
$$0 \to K \to \mathbb{Z}^{(I)} \to G \to 0$$
où $K$ est le noyau de l'application canonique $\mathbb{Z}^{(I)} \to G$. En tant que sous-groupe d'un groupe abélien libre, $K$ est abélien libre également, de la forme $\mathbb{Z}^{(J)}$, avec des générateurs $(h_j)_{j\in J}$. On écrit $h_j = \sum_{i\in I} d_{j,i}\widetilde{g}_i$ où $(\widetilde{g}_i)_i$ est une base de $\mathbb{Z}^{(I)}$ qui s'envoie sur $(g_i)_i$.
Notre espace est construit comme suit : On prend une 0-cellule, et on y recolle une $n$-cellule pour chaque $i \in I$ : on obtient un bouquet $\bigvee_{i\in I} S_i^n$. Ensuite, pour tout $j \in J$, on va attacher une $(n+1)$ -cellule $e_j^{n+1}$ par l'application $\mathbb{S}^n \to \bigvee_i \mathbb{S}_i^n$ suivante : le complémentaire de $\sum_i |d_{j,i}|$ disques $\mathbb{D}^n$ est envoyé sur la 0-cellule, de sorte que l'application à définir devient une application du bouquet de $\sum_i |d_{j,i}|$ sphères $§^n$ vers le bouquet $\bigvee_{i\in I} §_i^n$. Puis, pour tout $i \in I$, on envoie $|d_{j,i}|$ de ces sphères sur $§_i^n$, avec l'identité si $d_{j,i} > 0$, et avec une application de degré $-1$ sinon. On vérifie que cela donne bien un complexe cellulaire dont toutes les applications sont nulles, sauf $d_{n+1}$ qui est exactement l'inclusion $K \to \mathbb{Z}^I$ ci-dessus, d'où le résultat.
4. Le bouquet $\bigvee_{i\geq 1} M(G_i, i)$ convient.

## Exercice 4. Caractéristique d'Euler ⋆⋆

1. Cela vient de l'exercice 7 du TD8 appliqué au complexe de chaînes cellulaires de $X$ à coefficients dans $F$. Notons qu'en particulier cela implique que $\chi$ ne dépend pas de la décomposition cellulaire choisie.
2. On a $\chi(S_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$ et $\chi(S'_g) = 1 - g + 1 = 2 - g$.
3. Soit $f : S_h \to S_g$ un revêtement à $d$ feuillets (le nombre de feuillets doit être fini par compacité des surfaces considérées). L'intérieur de la 2-cellule de $S_g$ est simplement connexe, donc c'est un ouvert trivialisant : son image réciproque par $f$ est une réunion disjointe de $d$ disques ouverts. Reste à comprendre $f$ sur le 1-squelette, qui est un graphe : par le même raisonnement, l'image réciproque des intérieurs des 1-cellules est une union d'arêtes ouvertes. Finalement, l'image réciproque de chaque 0-cellule est constituée de $d$ points. Ainsi, $f$ détermine une décomposition cellulaire sur $S_h$, telle que $\chi(S_h) = d\chi(S_g)$.
Ainsi, nous devons avoir la relation $1-h = d(1-g)$, donc $h$ doit être de la forme $h = 1+d(g-1)$. (En particulier, on retrouve le fait que la seule surface compacte qui revêt le tore est le tore lui-même).
Réciproquement, si $h = 1+d(g-1)$, construisons un revêtement à $d$ feuillets de $S_g$ par $S_h$. On démarre avec un revêtement à $d$ feuillets du tore $S_1$ par lui-même. L'image réciproque d'un petit disque du tore

sera l'union disjointe de $d$ petits disques, si bien que nous avons un revêtement à $d$ feuillets du tore privé d'un disque par le tore privé de $d$ disques.

La surface $S_g$ est obtenue à partir du tore en enlevant un petit disque à $S_1$ et à $S_{g-1}$ et en recollant les deux surfaces trouées suivant le bord de leur trou. On recolle de même une copie de $S_{g-1}$ privée d'un disque sur le bord de chaque trou du tore privé de $d$ disques, de sorte à obtenir $S_h$. Notre revêtement ci-dessus se prolonge alors de manière naturelle en un revêtement de $S_g$ par $S_h$, en envoyant chaque copie de $S_{g-1}$ privée d'un disque dans $S_h$ identiquement sur la copie de $S_{g-1}$ privée d'un disque dans $S_g$.

4. Pour chaque entier $n$, si $A$ est un sous-CW complexe de $X$, alors si l'intérieur d'une cellule intersecte non-trivialement $A$, la cellule en entier est contenue dans $A$. Ainsi les $n$-cellules de $X$ est la réunion des $n$-cellules de $A$ et de $B$. Ainsi, on a $c_n(X) = c_n(A) + c_n(B) - c_n(A \cap B)$.

5. La formule portant sur les caractéristiques d'Euler résulte simplement de la formule Künneth. On va donner ici une autre démonstration qui repose sur une décomposition cellulaire de $X \times Y$. Soient $X = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_i e_i^n$ et $Y = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_j f_j^n$ des décompositions cellulaires de $X$ et $Y$, avec $(\phi_i^n)_{i,n}$ et $(\psi_{i,j})_{i,n}$ les applications caractéristiques correspondantes. Montrons alors qu'en définissant les $n$-cellules de $X \times Y$ comme étant les produits $e_i^k \times f_j^{n-k}$ pour tous $i, j$ et pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on définit bien une structure de complexe cellulaire. Pour une telle cellule, on a une application
$$\phi_i^k \times \psi_j^{n-k} : \bar{\mathbb{D}}^k \times \bar{\mathbb{D}}^{n-k} \to X \times Y.$$
On peut trouver un homéomorphisme $\bar{\mathbb{D}}^k \times \bar{\mathbb{D}}^{n-k} \simeq \bar{\mathbb{D}}^n$ qui induit des homéomorphismes
$$\mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k} \simeq \mathbb{D}^n,$$
et
$$(\partial \bar{\mathbb{D}}^k) \times \bar{\mathbb{D}}^{n-k} \cup \bar{\mathbb{D}}^k \times \partial \bar{\mathbb{D}}^{n-k} \to \partial \bar{\mathbb{D}}^n.$$
(Pour s'en convaincre, remplacer toutes les boules par des cubes : on a un homéomorphisme canonique $I^k \times I^{n-k} \to I^n$, et un point appartient à la frontière de $I^n$ si et seulement si au moins une de ses coordonnées vaut 0 ou 1. Si cette coordonnée est parmi les $k$ premières, alors il appartient à $(\partial I^k) \times I^{n-k}$, sinon il appartient à $I^k \times (\partial I^{n-k})$. )

Ainsi, $\phi_i^k \times \psi_j^{n-k}$ fournit bien une application caractéristique $\bar{\mathbb{D}}^n \to X$ dont la restriction à $\mathbb{D}^n$ induit un homéomorphisme avec $e_i^k \times f_j^{n-k}$. De plus, l'image de $\partial \bar{\mathbb{D}}^n$ est
$$\phi_i^k(\partial \bar{\mathbb{D}}^k) \times \psi_j^{n-k}(\bar{\mathbb{D}}^{n-k}) \cup \phi_i^k(\bar{\mathbb{D}}^k) \times \psi_j^{n-k}(\partial \bar{\mathbb{D}}^{n-k}),$$
qui est bien contenue dans une union finie de cellules de dimension au plus $n-1$. On vérifie également que la topologie est la bonne. La vérification de l'identité $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ est alors immédiate.

### Exercice 5. Homologie cellulaire et produit ⋆⋆

Voir http ://analysis-situs.math.cnrs.fr/Produit-des-CW-complexes-et.html

### Exercice 6. Points antipodaux ⋆⋆⋆

1. Une décomposition cellulaire est donnée en prenant une 0-cellule $e^0$, une 1-cellule $e^1$, puis deux 2-cellules $D_+$ et $D_-$ dont le bord est recollé sur la 1-squelette $\mathbb{S}^1$ suivant l'application $z \mapsto z^2$, dont le degré est 2 (autrement dit, cet espace est $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sur lequel on a recollé deux 2-cellules suivant $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1/\{\pm 1\}$, c'est-à-dire c'est $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ avec une 2-cellule supplémentaire). Ainsi, le complexe cellulaire s'écrit
$$0 \to \mathbb{Z}[D_+] \oplus \mathbb{Z}[D_-] \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$
l'application $f$ étant donnée par $[D_+] \mapsto 2$ et $[D_-] \mapsto 2$. Ainsi, les groupes d'homologie sont
$$H_0(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_2(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$
et $H_k(X;\mathbb{Z}) = 0$ pour $k \geq 3$.

2. Cet espace est $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sur lequel on a recollé deux 3-cellules $D_+$ et $D_-$ suivant l'application quotient $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2/\{\pm 1\}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ avec une 3-cellule supplémentaire. On en déduit le complexe cellulaire

$$0 \to \mathbb{Z}[D_+] \oplus \mathbb{Z}[D_-] \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

D'où les groupes d'homologie

$$H_0(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_2(X;\mathbb{Z}) = 0, \quad H_3(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$$

et $H_k(X;\mathbb{Z}) = 0$ pour $k \geq 4$.