Correction du TD3 : Homotopie

Exercice 1. Généralités ⋆

1. Soit $H : X \times [0,1] \to Y$ une homotopie entre f et g. Comme X est connexe par arcs et H est continue, l'image de H est connexe par arcs. Comme $H(0,.) = f$ et $H(1,.) = g$, on déduit que les images de f et g sont dans la même composante connexe par arcs.

2. Fixons $y_0 \in Y$. On va montrer que chaque application $f : X \to Y$ est homotope à l'application constante $e_{y_0} : X \to Y$ de valeur y_0. Comme Y est contractile, il existe $H : Y \times [0,1] \to Y$ telle $H(y,0) = y$ et $H(1,y) = y_0$. L'application $(t,x) \mapsto H(f(x),t)$ est une homotopie entre f et e_{y_0}.

3. L'application continue
$$\begin{aligned} H :\ X \times [0,1] &\to \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ (x,t) &\to (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$
est une homotopie entre f et g.

4. On remarque que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les applications $z \mapsto p(z)$ et $z \mapsto \lambda p(z)$ définies sur un cercle $\{|z| = R\}$ avec R supérieur au maximum des modules des racines de p sont homotopes, car reliées par l'homotopie $H(z,t) = \gamma(t)p(z)$ pour un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ reliant 1 à λ. On peut donc supposer que p et q sont unitaires. Alors $p(z) - q(z)$ est de degré $\leq n-1$, et par conséquent il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module $> r$,
$$|p(z) - q(z)| < |p(z)| \ .$$
En utilisant la question précédente, on conclut.

5. Comme $\mathbb{S}^n$ privé d'un point est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ par projection stéréographique, il est en particulier contractile. On conclut donc par la question 2.

6. Soient $x \in X$, $t \in [0,1]$ tels que $(1-t)f(x) + tg(x) = 0$. En prenant les normes, cela signifie que $t = \frac{1}{2}$, d'où $f(x) = -g(x)$, ce qui signifie que $|f(x) - g(x)| = 2|f(x)| = 2$, contradiction. Ainsi, l'homotopie définie par
$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|}$$
convient. La deuxième question est une application directe de la première.

Exercice 2. Équivalences d'homotopie ⋆

Terminologie : soit X un espace topologique et A une partie de X. Une rétraction de X sur A est une application continue $r : X \to A$ qui se restreint en l'identité sur A.

1. Soient $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$ des équivalences d'homotopie, de sorte qu'il existe $f' : X' \to X$ et $g' : Y' \to Y$ telles que $f' \circ f$ soit homotope à id_X, $f' \circ f$ à $\mathrm{id}_{X'}$ etc. On vérifie alors que $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ est une équivalence d'homotopie : si H est une homotopie de $f' \circ f$ vers id_X et I une homotopie de $g' \circ g$ vers id_Y, alors
$$H \times I : (t,(x,y)) \mapsto (H(t,x), I(t,y))$$
est une homotopie de $(f' \circ f) \times (g' \circ g) = (f' \times g') \circ (f \times g)$ vers $\mathrm{id}_{X \times Y}$. De même pour $f \circ f'$ et $g \circ g'$.

2. Par la question précédente, $X \times C$ a le même type d'homotopie que $X \times \{*\}$, et ce dernier a le même type d'homotopie que X.

3. Soit π la rétraction donnée par
$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{M} & \to & \mathbb{M} \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\frac{1}{2}, y\right) \end{array}$$
C'est une équivalence d'homotopie. En effet, une homotopie $H : \mathbb{M} \times I \to \mathbb{M}$ entre l'identité de $\mathbb{M}$ et π est donnée par :
$$H((x,y),t) = \left((1-t)x + \frac{t}{2}, y\right).$$

Exercice 3. Homotopies et cônes ⋆

Notons que si X est séparé, alors CX aussi : il est aisé de trouver des voisinages saturés disjoints de deux points de $X \times [0,1]$.

1. On dispose d'une rétraction vers le sommet donnée par $r : CX \to CX, (x,t) \mapsto (x,0)$. Elle est homotope à l'identité de CX via l'homotopie :
$$\begin{aligned} H : [0,1] \times CX &\to CX \\ (s,[(t,x)]) &\mapsto [(st,x)]. \end{aligned}$$
2. Supposons d'abord qu'une telle F existe. Alors $F \circ q : [0,1] \times X$ est une homotopie de f vers une application constante. Réciproquement, si f est homotope à une application constante, alors l'homotopie H entre f et l'application constante est une application (continue) $H : X \times I \to Y$ telle que $H|_{X \times \{0\}}$ est constante. Donc H se factorise en une application continue $F : CX \to Y$. L'application F ainsi construite nous convient.
3. Puisque $\partial \mathbb{D}^{n+1} = \mathbb{S}^n$, un point non nul de $\mathbb{D}^{n+1}$ est repéré de manière unique par un élément $\theta \in \mathbb{S}^n$ et un réel $r \in [0,1]$ (sa norme). On considère alors l'application $\mathbb{D}^{n+1} \to C\mathbb{S}^n$ qui associe à un point non nul de $\mathbb{D}^{n+1}$ ses coordonnées polaires généralisées (θ, r), et qui envoie 0 sur la classe de $\{0\} \times \mathbb{S}^n$. C'est une application bijective, continue, donc un homéomorphisme parce que les deux espaces sont compacts.
4. (a) C'est une conséquence directe de la question précédente.
   (b) On définit une rétraction $r : C_f \to Y$ par $q(x,t) \to f(x)$ sur CX et $y \mapsto y$ sur Y. On vérifie que cette application est bien continue (ce qui vient du fait que $(x,1) \sim f(x)$ dans C_f). Il s'agit d'une rétraction forte par déformation en considérant l'homotopie
   $$H : [0,1] \times C_f \to C_f$$
   définie par $(s,y) \mapsto y$ sur $[0,1] \times Y$ et $(s, q(x,t)) \mapsto [q(x, t(1-s)+s)]$ sur $[0,1] \times CX$.
   (c) L'idée est d'utiliser la moitié inférieure du cône pour appliquer l'homotopie entre f et g. Soit $H : X \times [0,1] \to Y$ une homotopie de f vers g, de sorte que $H(\cdot,0) = f$ et $H(\cdot,1) = g$. En notant entre crochets la classe d'un élément de $X \times [0,1] \coprod Y$ dans C_f, on définit une application continue
   $$\begin{array}{rccc} \Phi : & X \times [0,1] \coprod Y & \to & C_f \\ & y \in Y & \mapsto & [y] \\ & (x,t) & \mapsto & \begin{cases} [(x,2t)] & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ [H(x,2t-1)] & \text{si } t > \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}.$$
   On note que
   — Pour tout $x; x' \in X$, $\Phi(x,0) = [(x,0)] = [(x',0)] = \Phi(x',0)$.
   — Pour tout $x \in X$, $\Phi(x,1) = [H(x,1)] = [g(x)] = \Phi(g(x))$.
   donc Φ passe au quotient par les relations définissant C_g, et donne une application continue (que l'on appelle encore Φ) $C_g \to C_f$.
   De même, on construit une application continue $\Psi : C_f \to C_g$, en utilisant l'homotopie inverse $H'(x,t) = H(x,1-t)$. Il reste à montrer que $\Phi \circ \Psi : C_f \to C_f$ est homotope à l'identité de C_f

(et de même $\Psi \circ \Phi$ homotope à l'identité de C_g). Pour cela, on peut utiliser l'homotopie définie de la manière suivante :

$$U: \begin{array}{ccc} [0,1] \times C_f & \to & C_f \\ y \in Y & \mapsto & [y] \\ (x,t) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cc} [(x, \frac{(3s+1)t}{4})] & \text{si } t \leq \frac{3s+1}{4} \\ [H(x, 4t-3s-1)] & \text{si } [\frac{3s+1}{4}, \frac{s+1}{2}] \\ [H(x, 2-2t)] & \text{si } [\frac{s+1}{2}, 1] \end{array} \right. \end{array}.$$

On vérifie alors que c'est une homotopie entre l'identité de C_f et $\Phi \circ \Psi$. De manière similaire, on construit une homotopie entre $\Psi \circ \Phi$ et l'identité de C_g.

Exercice 4. Type d'homotopie d'un complémentaire ⋆⋆

1. Par changement de coordonnées, on peut supposer que E est l'espace $\{0\} \times \mathbb{R}^k$, de sorte que
$$\mathbb{R}^n \backslash E = \underbrace{(\mathbb{R}^{n-k} \backslash \{0\})}_{\sim \mathbb{S}^{n-k-1}} \times \underbrace{\mathbb{R}^k}_{\text{contractile}} \sim \mathbb{S}^{n-k-1}.$$

2. Quitte à appliquer une translation et une homothétie, on peut supposer que C contient 0 et est contenu dans la boule $B(0, \frac{1}{2})$. On considère alors la rétraction $\pi : \mathbb{R}^n \backslash C \to \mathbb{S}^{n-1}$ qui envoie x sur $\frac{x}{|x|}$. On définit l'homotopie
$$H(x,t) = t\frac{x}{|x|} + (1-t)x$$
entre π et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \backslash C}$. Il faut juste vérifier que l'image de H n'intersecte pas C. Or, pour tout x, $H(x,t)$ décrit le segment reliant $\frac{x}{|x|}$ et x. Si C intersecte ce dernier, alors comme il est convexe et contient 0, il doit contenir l'une des deux extrémités x ou $\frac{x}{|x|}$, ce qui est impossible.

3. On considère $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{0\}$ et B la droite $x = 0$. Alors A et B ont même type d'homotopie (A est même un rétracte par déformation forte de B), mais $\mathbb{R}^2 \backslash A$ a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^1$, alors que $\mathbb{R}^2 \backslash B$ est une union disjointe de deux espaces contractiles, donc a le même type d'homotopie qu'un ensemble de deux points.

4. En utilisant une translation du tore, on peut supposer que le point qu'on enlève est le point $z_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dans la description du tore comme quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par les identifications $(x,0) \sim (x,1)$ et $(0,y) \sim (1,y)$. On rétracte alors l'intérieur du tore sur le bord le long des segments qui joignent le point z_0 et la frontière.

Exercice 5. Rétractions ⋆⋆

1. Soit $x_0 \in X$. L'application r définie sur X et constante égale à x_0 est une rétraction de X sur x_0. En revanche, x_0 est un rétracte par déformation de X si et seulement si X est contractile. Si par exemple X n'est pas connexe par arcs, alors il n'est pas contractile.

2. Par Gram-Schmidt, chaque matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admet une décomposition, de façon unique, en produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont strictement positifs. En notant $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont les éléments diagonaux sont strictement positifs, on obtient un homéomorphisme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$. Comme $T_n^+(\mathbb{R})$ est convexe, donc contractile, la projection sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ définit la rétraction cherchée.

3. Tout point de P est un rétracte par déformation de P, puisque P est contractile. En revanche, les points de $\{0\} \times]0,1]$ ne sont pas des rétractes par déformation forte de P. En effet, soit $x = (0, \lambda) \in \{0\} \times]0,1]$, et soit $r : P \to \{x\}$ une rétraction par déformation forte. Alors par définition il existe une homotopie
$$H : P \times [0,1] \to P$$
telle que $H(\cdot, 0) = \mathrm{id}_P$, $H(\cdot, 1) = x$, et pour tout $t \in [0,1]$, $H(x,t) = x$.

L'espace $P \times [0,1]$ est compact, donc H est uniformément continue. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $y, z \in P$ et $t \in [0,1]$ tels que $|y - z| < \eta$, on ait $|H(y,t) - H(z,t)| < \epsilon$. On choisit $\epsilon < \lambda$, et n tel que $\frac{1}{n} < \eta$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, $H((\frac{1}{n}, \lambda), t)$ appartient au disque D de centre x et de rayon ϵ.
On remarque que les points x et $(\frac{1}{n}, \lambda)$ appartiennent à deux composantes connexes par arcs distinctes de $D \cap P$. Cependant, l'application $t \mapsto H((\frac{1}{n}, \lambda), t)$ est un chemin continu de $(\frac{1}{n}, \lambda)$ vers x, qui d'après ce qui précède, est entièrement contenu dans $D \cap P$. On aboutit donc à une contradiction.
Remarque : On peut également montrer que si on considère la variante

$$P' = ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{x\} \times [0,1]$$

du peigne, alors les seuls points sur lesquels P' se rétracte par déformation forte sont ceux de sa base $[0,1] \times \{0\}$.

Exercice 6. Composantes connexes par arcs des espaces fonctionnels ⋆⋆

On rappelle que la topologie compacte-ouverte sur $\mathcal{C}(X,Y)$ est engendrée par les parties de la forme

$$V(K,U) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y),\ f(K) \subset U\}$$

où $K \subset X$ est compact et $U \subset Y$ est ouvert.
Le résultat de l'énoncé est immédiat une fois qu'on a montré le résultat général suivant :

Lemme Soient X, Y, Z des espaces topologiques, avec X localement compact. Alors on a une bijection bien définie

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X \times Z, Y) & \to & \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X,Y)) \\ f & \mapsto & z \mapsto f_z \end{array}$$

où $f_z : X \to Y$ est l'application $x \mapsto f(x,z)$.

C'est un très bon exercice pour réviser la topologie compacte-ouverte ! Indication : commencer par montrer que l'application d'évaluation

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{ev} : & \mathcal{C}(X,Y) \times X & \to & Y \\ & (f,x) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est continue (on suppose toujours X localement compact). Référence : [1, Proposition A.14]

Exercice 7. Lacets remplissant la sphère ⋆⋆⋆

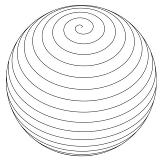
1. Voir la question 5 de l'exercice 1.
2. Oui : soit γ un lacet tel que $\gamma([0,1]) = \mathbb{S}^n$. On considère le lacet $\gamma' : t \mapsto \gamma(1-t)$ (c'est-à-dire γ' parcouru à l'envers). Alors le lacet qui consiste à parcourir γ puis γ', donné par :

$$\gamma' \circ \gamma : t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma'(2(t - \frac{1}{2})) & \text{pour } t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

   est homotope au lacet constant (voir cours sur le groupe fondamental).

3. Soit x un point quelconque de $\mathbb{S}^n$, et soient les deux ouverts de $\mathbb{S}^n$ donnés par $U = \mathbb{S}^n \setminus \{x\}$ et $V = \mathbb{S}^n \setminus \{-x\}$. Par compacité de $[0,1]$, il existe une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = 1$ de $[0,1]$ telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, l'image $\gamma([a_i, a_{i+1}])$ soit incluse dans U ou dans V. Soit par exemple i tel que $\gamma([a_i, a_{i+1}])$ soit incluse dans U. Or U est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, donc $\gamma_{|[a_i, a_{i+1}]}$ est homotope (relativement à a_i et a_{i+1}) à tout chemin reliant a_i et a_{i+1} et contenu dans U, par exemple un arc du grand cercle contenant a_i et a_{i+1}. Puisque $n \geq 2$, ce dernier est nulle part dense dans $\mathbb{S}^n$.

4. D'après la question 3, tout lacet surjectif est homotope à un lacet non surjectif. La question 1. permet alors de conclure. Le résultat est faux pour $n = 1$: le lacet $t \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi t}$ dans le cercle $\mathbb{S}^1$ n'est pas homotope au lacet constant (et donc à aucun lacet non surjectif).



Exercice 8. Décomposition de $\mathbb{S}^3$ en tores pleins $\star\star\star$

1. Il est facile de vérifier que ϕ est une bijection continue de source compacte et de but séparé. L'application ψ se construit en en inversant les rôles de (x_1, x_2) et (x_3, x_4).
2. Utiliser le fait que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \backslash \{0\}$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Références

[1] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Copyright © 2002 by Cambridge University Press.
`http://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf`