Correction du TD6 : Généralités sur les revêtements

Exercice 1. Quelques propriétés ⋆

1. Soit $x \in B$, U un ouvert trivialisant autour de x, qu'on peut supposer connexe, avec une trivialisation $U \times F \xrightarrow{\psi} p^{-1}(U)$ où F est un espace discret. Comme U est connexe, si $i \in F$ est tel que
$$\psi(U \times \{i\}) \cap C \neq \emptyset ,$$
alors $\psi(U \times \{i\}) \subset C$, car C est une composante connexe. Posons $F' = \{i \in F, \psi(U \times \{i\}) \subset C\}$. C'est encore un espace topologique discret. On a alors une trivialisation $p_{/C}^{-1}(U) \to U \times F'$. Ainsi $p_{/C} : C \to B$ est un revêtement. En particulier, ou bien C est vide ou bien $p_{/C}$ est surjective par la proposition suivante.

   Proposition. Soit (E, p) un revêtement de B. Si B est connexe, alors on est dans une et une seule des deux situations suivantes : l'espace E est vide ou l'application p est surjective.

   Preuve. Rappelons que, par convention, un espace connexe est non-vide. On ne peut donc clairement pas être à la fois dans les deux situations. Notons U l'ensemble des points de E au-dessus desquels les fibres sont vides. Si x est dans U, alors, on peut trouver un voisinage ouverts de x dans B tel que la restriction du revêtement à ce voisinage soit triviale. Un revêtement trivial dont une des fibres est vide a nécessairement toutes ses fibres vides. On en déduit que U contient le voisinage de x. Cela montre que U est un ouvert. Un raisonnement analogue montre que le complémentaire de U est ouvert. Comme B est connexe, on doit avoir $U = E$ ou $U = \emptyset$.

2. Soit $x \in B$ et U un ouvert trivialisant de p autour de b, $\{y_1, \cdots, y_n\}$ la fibre de x par p et V_i un ouvert trivialisant de q autour de y_i pour chaque $i = 1, \cdots, n$. Il existe donc des espaces topologiques discrets F, F_i où $F = \{1, \cdots, n\}$ est fini et des homéomorphismes
$$U \times F \xrightarrow{\psi} p^{-1}(U), \quad V_i \times F_i \xrightarrow{\psi_i} q^{-1}(V_i) .$$
Quitte à restreindre U, on peut supposer que chaque $U \times \{i\}$ est homéomorphe à V_i via ψ. On a donc un homéomorphisme $(p \circ p)^{-1}(U) = q^{-1}(p^{-1}(U)) \to V_i \times F_i$. D'où $p \circ q$ est bien un revêtement.

3. Comme l'application p n'est pas injective, il existe donc deux points x_1 et x_2 de même image par p. Comme E est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \to X$ qui relie x_1 à x_2. Si B était simplement connexe alors le chemin $p \circ \gamma$ serait homotopiquement trivial, ce qui impossible car il admet un relèvement qui n'est pas un lacet.

4. Prenons un recouvrement $(U_\alpha)_\alpha$ de B par des ouverts trivialisants. Chaque $p^{-1}(U_\alpha)$ est homéomorphe à $U \times \{1, 2\}$. Soit σ_α l'unique involution de $U \times \{1, 2\}$ qui échange 1 et 2 et agit par l'identité sur U. Elle définit un homéomorphisme involutif de $p^{-1}(U_\alpha)$ tel que $p \circ \sigma = p$. Sur $p^{-1}(U_\alpha) \cap^{-1} (U_\beta)$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$ car ils échangent tous les éléments d'une fibre. Ainsi les σ_α se recollent en un homéomorphisme global de E qui vérifie $p \circ \sigma = p$.

   Pour le contre-exemple, rappelons les éléments suivants : un revêtement à n-feuillets détermine un morphisme de groupes $\phi : \pi_1(B, b_0) \to \mathcal{S}_n$ (le groupe symétrique d'indice n) et un morphisme de revêtement détermine par action sur la fibre en b_0 un élément de $\mathcal{S}_3$ qui commute avec l'image de $\pi_1(B, b_0)$. Par ailleurs, le morphisme de groupes $\mathrm{aut}(p) \to \mathcal{S}_n$ est injectif : un automorphisme de revêtement qui agit trivialement sur une fibre est trivial. En effet, soit σ un tel automorphisme, $b \in B$ tel que l'action de σ soit triviale sur la fibre en b. Si U est un ouvert trivialisant, chaque copie de U dans E est stable par σ car b a un unique antécédent dans cette copie. Donc l'action de σ est triviale sur cet ouvert. Par connexité de B, σ est trivial.

On voit donc que $\mathrm{aut}(p)$ est contenu dans le centralisateur de $\pi_1(B, b_0)$ dans $\mathcal{S}_3$. L'idée est alors de trouver un revêtement pour le quel ϕ est surjective (le centre de $\mathcal{S}_3$ étant trivial). Le groupe fondamental d'un bouquet de deux cercles est libre à deux éléments par le théorème de Van Kampen, et s'envoie donc de manière surjective donc sur $\mathcal{S}_3$. En particulier, il agit transitivement sur un ensemble à trois éléments et le stabilisateur détermine un revêtement à trois feuillets du bouquet de deux cercles qui n'admet pas d'automorphisme non-trivial.

Exercice 2. Produit et tiré en arrière de revêtements ⋆

1. Soient $b \in B$, $b' \in B'$ et U, U' des ouverts trivialisants autour de b et b' respectivement avec des homéomorphismes $p^{-1}(U) \simeq U \times F$ et ${p'}^{-1}(U') \simeq U' \times F'$ où F et F' sont des espaces topologiques discrets. On a alors $(p \times p')^{-1}(U \times U') \simeq U \times U' \times F \times F'$, ce qui montre que c'est bien un revêtement. Pour le contre-exemple, considérer un produit infini de copies du revêtement $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ et remarquer que par définition de la topologie produit, un ouvert en haut est produit d'ouverts de $\mathbb{R}$ et qui sont égaux à $\mathbb{R}$, sauf un nombre fini.
2. Soit $b \in B$, et U un voisinage de b trivialisant p, et soit F la fibre au-dessus de b, de sorte qu'on ait un homéomorphisme $\phi : p^{-1}(U) \to U \times F$. L'ouvert $f^{-1}(U)$ est trivialisant pour $f^*(p)$. En effet, on a un homéomorphisme
$$f^*(p)^{-1}(f^{-1}(U)) \to f^{-1}(U) \times F$$
en envoyant $(x, e) \in f^*(p)^{-1}(f^{-1}(U))$ sur $(x, \mathrm{pr}_2 \circ \phi(e))$, où $\mathrm{pr}_2 : U \times F \to F$ est la projection.

Exercice 3. Actions de groupes ⋆

Definition. Un groupe G agit totalement discontinûment sur un espace X, si tout point $x \in X$ admet un voisinage U tel que pour tout $g \in G$, si $g.U \cap U \neq \emptyset$, alors $g = 1$ (l'unité de G).

1. On va montrer que le groupe G agit totalement discontinûment sur X. Soit $x \in X$, et soit K un voisinage compact de x. Par hypothèse, on sait que l'ensemble $\{g \in G, gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini et il est donc égal à $\{g_1, \ldots, g_n\}$ et on peut supposer que $g_1 = 1$. Comme l'action est libre, on a
$$g_i.x \neq g_j.x \quad \text{pour } i \neq j\ .$$
L'espace X étant supposé localement compact, il est en particulier séparé. Considérons alors des voisinages $U_1, \ldots, U_n$ disjoints de $g_1.x, \ldots g_n.x$, et on va montrer que le voisinage
$$U = K \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(U_i)$$
de x convient. Soit $g \in G$ tel que $g.U \cap U \neq \emptyset$, alors $g.K \cap K \neq \emptyset$ donc il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $g = g_i$. On a alors $g.U \subseteq U_i$ et $U \subseteq U_1$ et donc $U_1 \cap U_i \neq \emptyset$. Ceci implique par hypothèse que $g = 1$. D'où l'action de G est totalement discontinue.
Montrons à présent que c'est un revêtement : soit $x \in X$ et U l'ouvert construit précédemment. Alors $p(U)$ est un voisinage ouvert de $p(x)$ dans $G \backslash X$ par définition de la topologie quotient : en effet $p^{-1}(p(U)) = \cup_{g \in G} g.U$.
De plus, pour tout $g \in U$, l'application $p_g := p_{/g.U} : g.U \to p(U)$ est continue, bijective, et ouverte : c'est donc un homéomorphisme. D'où, l'application
$$p^{-1}(p(U)) \to G \times p(U)$$
donnée sur $g.U$ par $\psi(y) = (g, p_g(y))$ est un homéomorphisme au dessus de $p(U)$. Ainsi p est un revêtement.

2. Soient $x, x' \in X$ tels que $p(x) \neq p(x')$. On veut construire des voisinages V et V' de x et x' dans X tels que pour tout $g \in G$, $g.V \cap V' = \emptyset$, car dans ce cas les voisinages $p(V)$ et $p(V')$ séparent $p(x)$ et $p(x')$. Choisissons d'abord un voisinage U de x tel que $g.U \cap U = \emptyset$ pour tout $g \neq 1$, et de même un voisinage U' de x'.

   Par choix de U', il n'existe qu'un nombre fini de g_i tel que $g_i.U \cap U' \neq \emptyset$. Comme X est séparé, on peut choisir des voisinages W_i des $g_i.x$ et un voisinage $V' \subseteq U'$ autour de x' pour que $W_i \cap U' = \emptyset$ pour tout i. Considérons ensuite $V = U \cap \bigcap g_i^{-1} W_i$. Montrons alors que les voisinages V et V' conviennent : pour $g \in G$, remarquons que $g.V \cap V' \subseteq g.U \cap U'$. Si cette intersection est non-vide, alors $g = g_i$ pour un certain i comme avant. Alors
   $$g.V \cap V' \subset W_i \cap V' = \emptyset \ ,$$
   ce qui est absurde. Ainsi $g.V \cap V' = \emptyset$.

3. Par propriété du quotient, on a $p(g.x) = p(x)$ pour tout $x \in X$ et $g \in G$. Ainsi, on a un morphisme de groupes $\psi : G \to \mathrm{Aut}(p)$ donné par $g \mapsto L_g$ où L_g est la translation à gauche par un élément $g \in G$. Comme l'action de G sur X est libre, ψ est injectif. Soit maintenant $f \in \mathrm{Aut}(p)$. Alors pour tout $x \in X$, il existe $g_x \in G$, tel que $f(x) = g_x.x$. Soit $x \in X$ et U un voisinage de x comme dans la première question. On a
   $$f(U) \subseteq p^{-1}(p(f(U))) = \bigcup_{g \in G} g.U$$
   et comme les intersections sont deux à deux disjointes, il existe g tel que $f(U) \subset g.U$. Alors pour tout $y \in U$, on a $y \in g_y^{-1} g.U$, d'où $g = g_y$. Ainsi $f = L_g$ sur U. Par connexité de X, on conclut que $f = L_g$. Ainsi ψ est une bijection.

Remarque. On peut aussi utiliser simplement le fait que deux relèvements qui coïncident en un point sont égaux, voir ici : http ://analysis-situs.math.cnrs.fr/Relevement-des-applications.html

Exercice 4. Exemples de revêtements ⋆ ⋆

1. Le quotient de $\mathbb{S}^n$ par l'action du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par l'antipodie est égal à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Donc c'est un revêtement à 2 feuillets.

2. Supposons A non-vide. Alors A est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}$ car revêt $\mathbb{S}^1$, et montrons que A est aussi fermé : si une suite de points $(x_n)_n$ converge vers x, soit U un voisinage ouvert de x tel que $p_{/U}$ est injective. Il existe n_0 tel que $x_{n_0} \in U$. Le chemin qui relie $p(x_{n_0})$ à $p(x)$ se relève à A et par unicité $x \in A$. Donc A doit être égal à $\mathbb{R}$.

3. Le revêtement universel du ruban de Möbius est donné par $[0,1] \times \mathbb{R}$ avec l'action du groupe libre $\mathbb{Z}$ engendré par $(x, y) \mapsto (1 - x, y + 1)$. En particulier les revêtements sont donnés par les quotients de $\mathbb{Z}$ et il en existe avec n'importe quel nombre de feuillets. Remarquer qu'un revêtement à nombre fini et impair de feuillets est forcément un ruban de Möbius alors qu'un revêtement par un nombre pair de feuillets est un cylindre.

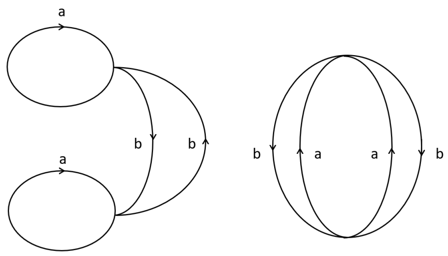
4. C.f question précédente.

5. La bouteille de Klein est le quotient du groupe topologique $\mathbb{R}^2$ par le groupe de transformations engendrés par $\sigma_1 : (x, ; y) \mapsto (x, y + 1)$ et $\sigma_2 : (x, y) \mapsto (-x, y + 1)$. Remarquer que le quotient par le sous groupe engendré par σ_1 et σ_2^2 est isomorphe à un tore et c'est un revêtement de la bouteille de Klein.

6. Regarder $\mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1 \to \mathrm{U}(n)$ défini par $(M, z) \mapsto zM$.

7. Le groupe fondamental de la réunion d'une sphère avec l'un de ses diamètres est $\mathbb{Z}$. En effet, on peut trouver un recouvrement par deux ouverts U et V tels que U est l'hémisphère nord jusqu'au tropique du capricorne et V est l'hémisphère sud jusqu'à l'équateur. L'intersection est connexe par arcs, V est contractile, U a le type d'homotopie d'un cercle et $U \cap V$ a le type d'homotopie d'un cercle qui est trivial en homotopie dans U. Donc par le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental est égal à $\mathbb{Z}$.

8. Le groupe fondamental d'un bouquet de deux cercles est isomorphe au groupe libre à deux générateurs par le théorème de Van Kampen, disons a et b. Notons B le bouquet de deux cercles. Un revêtement E de degré 2 est nécessairement galoisien : en effet $\pi_1(E)$ s'identifie au noyau du morphisme de groupes $\pi_1(B)$ dans $\mathcal{S}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc se donner E équivaut à se donner un morphisme du groupe libre à deux générateurs vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et donc à choisir l'image de a et b, ce qui donne quatre possibilités. Voir *Hatcher, Algebraic Topology*, page 58, Exemples (1) et (2) dans le tableau.



Exercice 5. Homéomorphismes locaux ⋆⋆

1. L'application exponentielle $p :]0, 2[\to \mathbb{S}^1$ est un homéomorphisme local qui n'est pas un revêtement car ne vérifie la propriété de relèvement de chemin par exemple.

2. On reprend l'exemple précédent : considérons la projection du chemin $[-1/3, 1/3]$ dans le cercle. Il n'admet pas de relèvement dans $]0, 2[$ qui en temps 1 arrive à $1/3$ par unicité des relèvements.

3. (a) Notons n le cardinal des fibres. Soit $x \in B$ et $y_1, \cdots, y_n$ ses antécédents par p. Comme p est un homéomorphisme local, il existe un ouvert U autour de x et des ouverts V_i autour de chaque y_i homéomorphe à U via p. On a alors $p^{-1}(U) = \cup_i V_i$, car on a exactement n antécédents pour chaque $y \in U$. D'où p est un revêtement. Pour un contre-exemple, dans le cas où les fibres ne sont plus supposées de cardinal fini, on peut prendre la projection de la demi droite ouverte $]0, +\infty[$ donnée par l'application exponentielle, qui est à fibres infinies et n'est pas un revêtement car on ne peut relever un chemin qui part d'un point proche de 0.

   (b) L'image est fermée par hypothèse et ouverte car p est un homéomorphisme local. Donc p est surjective. L'image réciproque de tout singleton est compacte et discrète, donc finie. On va montrer que les fibres ont le même cardinal
   Soit $b \in B$. Notons $y_1, \ldots, y_n$ les antécédents de b et choisissons des ouverts $U_1, \ldots, U_n$ disjoints deux à deux tel que $y_i \in U_i$, ce qui est possible car E est séparé. Comme p est un homéomorphisme local, on peut de plus supposer que $p : U_i \to p(U_i)$ est un homéomorphisme. Si $y \in \bigcap_i p(U_i)$, alors y a au moins n antécédents par p. Ceci montre que l'ensemble

$$B_{\geq n} = \{y \in B, |p^{-1}(\{y\})| \geq n\}$$

   est ouvert.
   Notons ensuite $V = B \setminus p(E \setminus \cup_{i=1}^n U_i)$. Alors V est ouvert car par hypothèse p est fermée et donc $p(E \setminus \cup_{i=1}^n U_i)$ est fermé. Remarquons que si $x \in p^{-1}(V)$, alors $p(x) \in V$, i.e.,

$$p(x) \notin p(E \setminus \cup_{i=1}^n U_i)$$

et pour que cette dernière condition soit vérifiée, il faut que pour tout $y \in E$ qui est un antécédent de $p(x)$, on ait $y \notin E \setminus \cup_{i=1}^{n} U_i$.
Autrement dit, la fibre de $p(x)$ par p est entièrement contenue dans la réunion $\cup_{i=1}^{n} U_i$. On a donc montré que $p^{-1}(V)$ est contenu dans l'union (disjointe) $\cup_{i=1}^{n} U_i$. Ainsi pour tout point $y \in V$, le cardinal de $p^{-1}(\{y\})$ est au plus n. Ceci implique que l'ensemble $B_{\leq n}$ défini de manière analogue à $B_{\geq n}$ est ouvert également. Donc $B_{\geq n} = B \backslash B_{\leq n-1}$ est fermé. D'où $B_n = B_{\leq n} \cap B_{\geq n}$ est à la fois ouvert et fermé et non-vide, donc égal à B par connexité. D'où le résultat.

4. Utiliser 3.(a).

Exercice 6. Revêtement à nombre infini de feuillets ⋆⋆⋆

On écrit $U \cap V$ comme une union disjointe de deux ouverts non-vides C_0 et C_1. Considérer le sous-espace de $X \times \mathbb{Z}$ défini par

$$Y = \{(x,k), x \in U,\ k \text{ pair}\} \cup \{(x,k), x \in V, k \text{ impair}\},$$

puis on prend le quotient par les relations :

$$(x,k) \sim (x,k-1) \text{ si } x \in C_0,\ k \text{ pair}$$

et

$$(x,k) \sim (x,k-1) \text{ si } x \in C_1,\ k \text{ impair}.$$

Faire un dessin pour voir que l'on recolle successivement U et V une fois le long de C_0, l'autre le long de C_1. Notons $\widetilde{Y}$ le nouveau espace obtenu et $f : Y \to \widetilde{Y}$ le passage au quotient. Alors l'espace $\widetilde{Y}$, avec l'application induite par la projection $pr_1 : X \times \mathbb{Z} \to X$, donne un revêtement de X avec un nombre infini de feuillets. En effet, on a $pr_1^{-1}(U) = \coprod_{k \text{ pair}} U \times \{k\}$ et similairement pour V. Montrons que $\widetilde{Y}$ est connexe. On suppose donc que $\widetilde{Y} = W_1 \coprod W_2$, où W_1, W_2 sont des ouverts disjoints. Par connexité de U, on peut supposer que $f(U \times \{0\}) \subseteq W_1$. Par connexité de V, on a aussi nécessairement $f(V \times \{1\}) \subseteq W_1$. On voit alors par récurrence que $\widetilde{Y} \subseteq W_1$, d'où le résultat.