Correction du TD7 : Revêtements et groupes fondamentaux

Exercice 1. Échauffement ⋆

1. Pour montrer que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$, il suffit de remarquer qu'en enlevant un point à $\mathbb{R}$ on obtient un espace non connexe par arcs, alors que $\mathbb{R}^2$ privé d'un point reste connexe par arcs. Cette stratégie n'est pas suffisante pour comparer $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 3$, mais on peut s'en inspirer en comparant plutôt les groupes fondamentaux : $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est homotope à $\mathbb{S}^1$, donc a un groupe fondamental non-trivial, alors que $\mathbb{R}^n$, privé d'un point a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^{n-1}$, qui est simplement connexe pour $n \geq 3$. En effet, on peut écrire $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{D}^+ \cup \mathbb{D}^-$ où
$$\mathbb{D}^+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}, x_1 > -\frac{1}{4}\}$$
et
$$\mathbb{D}^- = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}, x_1 < \frac{1}{4}\}.$$
Alors $\mathbb{D}^+$ et $\mathbb{D}^-$ sont contractiles (on peut le voir par projection stéréographique par exemple), l'intersection $\mathbb{D}^+ \cap \mathbb{D}^-$ se rétracte sur l'équateur $\mathbb{S}^{n-2}$, en particulier elle est connexe par arcs. Ainsi, par le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental de $\mathbb{S}^{n-1}$ est trivial.

2. On rappelle la proposition suivante :
Proposition : *Soit $p : E \to B$ un revêtement tel que $p(e_0) = b_0$. Soit $d : Y \to B$ continue telle que $f(y_0) = b_0$. Si Y est CALCA, alors f admet un relèvement (unique avec $\tilde{f}(y_0) = e_0$) si et seulement si*
$$f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(E, e_0)\ .$$
On considérons le revêtement universel $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$. Le groupe fondamental de $\mathbb{R}$ est trivial tout comme $p_*\pi(\mathbb{R})$. Par hypothèse, X est CALCA et de groupe fondamental fini. Le groupe $\mathbb{Z}$ n'a pas de torsion, donc l'image du groupe fondamental de X par f est triviale dans $\pi_1(\mathbb{S}^1)$. Par la proposition précédente, on peut alors relever $f : X \to \mathbb{S}^1$ en une application $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$. Ainsi, f est homotope à une application constante.

3. Rappelons que si B est un espace CALCA et $\tilde{p} : \tilde{E} \to B$ est un revêtement universel ($\Leftrightarrow$ B est semi-localement simplement connexe) alors on a un isomorphisme
$$\mathrm{Aut}(\tilde{p}) \xrightarrow{\mathcal{J}} \pi_1(B, b), \quad f \longmapsto [\gamma_f] \tag{1}$$
où γ_f est l'unique lacet tel que pour tout $x \in \tilde{p}^{-1}(b)$,
$$f(x) = x \cdot \gamma_f = \tilde{\gamma}_f(1)$$
où l'on note $\tilde{\gamma}_f$ le relèvement de γ_f à $\tilde{E}$ tel que $\tilde{\gamma}_f(0) = x$.
   - Le revêtement $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $p(t) = e^{2i\pi t}$ est universel car $\mathbb{R}$ est contractile. Son groupe d'automorphisme, isomorphe à $\mathbb{Z}$, est le groupe des translations, $T_n(t) = t + n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On retrouve $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}$.
   - Soit $n \geq 2$. La surjection canonique $\mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ est un revêtement universel puisque la sphère $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe. Son groupe d'automorphismes, engendré par l'antipodie, est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$. On retrouve $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$.

Exercice 2. Classification complète ⋆

Soit (B, b) un espace connexe par arc, localement connexe par arcs, et semi-localement simplement connexe. On note $\mathrm{Rev}(B)$ l'ensemble des revêtements connexes de B à isomorphismes près. L'application qui à un revêtement $p : X \to B$ associe $p_*\pi_1(X, x)$ avec $p(x) = b$ détermine une bijection entre $\mathrm{Rev}(B)$ et les classes de conjugaisons de sous-groupes de $\pi_1(B, b)$.

Rappelons la preuve de la surjectivité. Soit Γ un sous-groupe de $\pi_1(B,b)$. On note $\tilde{p}:\tilde{E}\to B$ le revêtement universel de B. A travers l'isomorphisme (1), on a un sous-groupe $\mathcal{J}^{-1}(\Gamma)$ qui agit de manière totalement discontinue sur $\tilde{E}$. D'après l'exercice 3 sur TD6, on a donc un revêtement p qui induit un revêtement π :

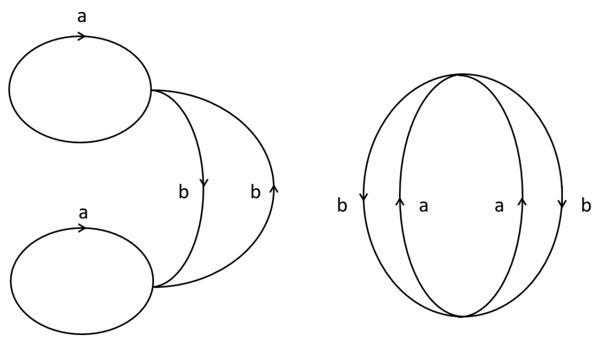
$$\tilde{E} \xrightarrow{p} \tilde{E}/\mathcal{J}^{-1}(\Gamma) \xrightarrow{\pi} B\ .$$

Notons que si Γ est d'indice fini n dans $\pi_1(B,b)$ alors π est un revêtement à n feuillets.

1. Le groupe fondamental du cercle étant égal à $\mathbb{Z}$, ses revêtements sont tous galoisiens. Le revêtement universel est l'exponentielle complexe, $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$, $t\mapsto e^{2i\pi t}$. Les seuls sous-groupes de $\mathbb{Z}$ étant de la forme $n\mathbb{Z}$, les revêtements de $\mathbb{S}^1$ sont de la forme $q_n:\mathbb{R}/n\mathbb{Z}\to\mathbb{S}^1$, avec $q_n(t \pmod n)=e^{2i\pi t}$. La multiplication par n induit un homéomorphisme entre $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong\mathbb{S}^1$; ainsi à isomorphisme près, les revêtements du cercle sont les application $q_n:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$, $z\mapsto z^n$, de fibre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Le stabilisateur est $n\mathbb{Z}$, image du groupe fondamental de l'espace total par q_n. Le groupe des automorphismes est le quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; ses éléments sont les applications $z\mapsto ze^{\frac{2i\pi p}{n}}$.
2. Un bouquet de deux cercles, $(B,x_0)=\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1$, a pour groupe fondamental le groupe libre à deux générateurs, $G=\langle a,b\rangle$. Les revêtements à deux feuillets correspondent aux sous-groupes d'indice 2 dans G. Comme tout sous-groupe d'indice 2 est distingué, ce sont des revêtements galoisiens. Soit $q:(E,x)\to(\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1,x_0)$ un revêtement à deux feuillets. Se donner une action de G sur $q^{-1}(b)=\{x_1,x_2\}$ équivaut à se donner les éléments $x_1\cdot a$ et $x_1\cdot b$. De plus, comme l'action doit être transitive, l'un des deux éléments précédents doit être égale à x_2. On a donc trois cas possibles :

   (a) $x_1\cdot a=x_2,\quad x_1\cdot b=x_1$;
   (b) $x_1\cdot a=x_1,\quad x_1\cdot b=x_2$;
   (c) $x_1\cdot a=x_2,\quad x_1\cdot b=x_2$;

   On peut alors représenter géométriquement les espaces totaux des revêtements associés au cas (a) et (c), le cas (b) se déduit du cas (a) par symétrie.



3. Soit $n\geq 2$. La surjection canonique $\mathbb{S}^n\to\mathbb{RP}^n$ est un revêtement universel puisque la sphère $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe. Son groupe d'automorphismes, engendré par l'antipodie, est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$. On retrouve $\pi_1(\mathbb{RP}^n)=\mathbb{Z}_2$. Le groupe $\mathbb{Z}_2$ a seulement deux sous-groupes donc à isomorphisme près, on n'a que deux revêtements : le revêtement universel par $\mathbb{S}^n$ et le revêtement trivial par $\mathbb{RP}^n$ lui-même.
4. On rappelle que le groupe fondamental du tore $\mathbb{T}$ est donné par $\pi_1(\mathbb{T})=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, le groupe abélien libre de rang 2. On commence par montrer qu'un sous-goupe de ce dernier est nécessairement d'une des trois formes suivantes :

   (a) le groupe trivial,
   (b) un groupe abélien libre avec un générateur (p,q),
   (c) un groupe abélien libre avec deux générateurs (p,q) et (r,s) tels que $ps-qr\neq 0$.

   Tout d'abord, un sous-groupe d'un groupe abélien libre est également abélien libre. Ensuite, tout sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ a au plus deux générateurs. En effet, par l'absurde, supposons qu'il existe un sous-groupe avec au minimum trois générateurs. En prenant une combinaison linéaire à coefficients entiers, on obtient un élément de la forme (p, q) où p est le pgcd des générateurs. On ajoute cet élément à l'ensemble des gérérateurs. Alors, les autres générateurs peuvent être transformés en des éléments de la forme $(0, r)$ en soustrayant des multiples de (p, q). De nouveau, on prenant une combinaison linéaire des générateurs de la forme $(0, r)$, on obtient un élément de la forme $(0, s)$ où s est le pgcd des éléments r. Alors (p, q) et $(0, s)$ engendrent le sous-groupe d'où la contradiction.

Pour tout sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ on construit alors un revêtement associé.

(a) Pour le sous-groupe trivial, on obtient le revêtement universel du tore par $\mathbb{R}^2$ avec l'application

$$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}, \quad (x, y) \longmapsto (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y}) \ .$$

(b) Si le sous-groupe est engendré par l'élément (p, q), alors le revêtement associé est donné par

$$p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \quad (e^{2i\pi x}, y) \mapsto (e^{2i\pi px}, e^{2i\pi(qx+y)}) \ .$$

En effet, on a par construction que $p_*([z]) = ([z^p], [z^q])$, ainsi $p_*(1) = (p, q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Cela implique que $p_*(\mathbb{Z}) = (p, q)\mathbb{Z}$.

(c) Si le sous-groupe a deux générateurs, (p, q) et (r, s) avec $ps - rq \neq 0$, alors le revêtement correspondant est donné par

$$p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \quad (z, w) \longmapsto (z^p w^r, z^q w^s) \ .$$

En effet, $p([z], [1]) = ([z^p], [z^q])$ et $p([1], [w]) = ([w]^r, [w]^s)$. Ainsi $p_*(1, 0) = (p, q)$ et $p_*(0, 1) = (r, s)$, ce qui montre que $p_*(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ est le sous-groupe engendré par (p, q) et (r, s).

Un sous-groupe de ce dernier est soit de rang 2 (revêtement trivial par un tore à nombre de feuillets égal à l'indice du sous groupe), soit nul (le revêtement universel $\mathbb{R}^2$), soit de rang 1 (revêtement par un cylindre).

5. Comme vu dans le TD3, le ruban de Möbius $\mathbb{M}$ a le même type d'homotopie que la sphère. Ainsi, $\pi_1(\mathbb{M}) = \mathbb{Z}$. Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le revêtement universel du ruban de Möbius est donné par $[0, 1] \times \mathbb{R}$ avec l'action du groupe libre $\mathbb{Z}$ engendré par $(x, y) \mapsto (1 - x, y + 1)$. On construit les autres revêtements de la façon suivante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le quotient $Y_n := ([0, n] \times [0, 1]) / \sim$ par la relation d'équivalence donnée par

$$\begin{aligned} (0, y) \sim (n, 1 - y) &\quad \text{si n est impair} \\ (0, y) \sim (n, y) &\quad \text{si n est pair} \end{aligned}$$

Pour n impair, on a $Y_n \cong \mathbb{M}$ et pour n pair, Y_n est isomorphe à un cylindre.
On obtient alors un revêtement à n-feuillets, $p_n : Y_n \to \mathbb{M}$ définit pour $x, y \in [0, 1]$ par $p_n([(k+x, y)]) = [(x, y)]$ pour tout k pair et $p_n([(k + x, y)]) = [(x, 1 - y)]$ pour tout k impair.

Exercice 3. Bouquet de deux plans projectifs ⋆

1. En temps que variété, le plan projectif $\mathbb{RP}^2$ est un espace correctement pointé. L'exercice 2 du TD5 et le calcul du groupe fondamental d'un bouquet d'espaces correctement pointés implique que

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ .$$

2. Pour simplifier l'exposition, on colorie un des deux plans projectifs en rouge, et l'autre en bleu. Soient a et b les deux générateurs du groupe fondamental, a celui correspondant au plan projectif rouge, et b celui correspondant au plan projectif bleu.

Puisque a et b sont d'ordre 2, on a $(ab)^{-1} = ba$. On note $c = ab$. Ainsi, tout mot réduit de longueur paire en a et b est de la forme c^n pour $n \in \mathbb{Z}$. Quant aux mots de longueur impaire, ils sont de la forme $c^n ac^{-n}$ ou $c^{-n} bc^n$ ou $c^n(aba)c^{-n}$ ou $c^{-n}(bab)c^n$ pour $n \geq 0$.
Mieux : puisque $aba = cbc^{-1}$ et $bab = c^{-1}ac$, tout mot impair est en fait de la forme $c^n ac^{-n}$ ou $c^n bc^{-n}$.

Soit H un sous-groupe de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous avons plusieurs cas à distinguer :

(a) H est trivial

(b) H est contenu dans le sous-groupe $\langle c \rangle$ engendré par c. Ainsi, il est engendré par c^m pour un certain $m \geq 1$, et est donc d'indice $2m$ dans G.

(c) $H \cap \langle c \rangle = \{1\}$. Alors H contient un unique mot de longueur impaire, et est d'ordre 2. Quitte à remplacer H par un sous-groupe conjugué, on peut supposer que ce mot est a ou b.

(d) H n'est pas contenu dans $\langle c \rangle$, et l'intersection $H \cap \langle c \rangle$ est non-triviale. Ainsi, H contient un certain c^m, et quitte à conjuguer par une puissance de c, on peut supposer que H contient a ou b. Si $m = 2k+1$ est impair, on remarque que $ac^m = b(ab)^{2k} = (ab)^{-k}b(ab)^k$, et donc les sous-groupes $\langle a, c^m \rangle$ et $\langle b, c^m \rangle$ sont conjugués. En revanche, si m est pair, leurs classes de conjugaison sont distinctes (cf. les revêtements distincts obtenus plus bas).

Les revêtement correspondant à ces classes de conjugaison de sous-groupes sont :

(a) On considère l'espace topologique obtenu comme union d'une sphère de centre $(k, 0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Si on colorie toutes les sphères « paires » en rouge et les sphères « impaires » en bleu, on obtient un revêtement en envoyant les sphères bleues sur la partie bleue de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et les sphères rouges sur la partie rouge. Cet espace est bien le revêtement universel car il est simplement connexe, comme on peut le voir par exemple en appliquant Van Kampen. Notons que tout élément de G induit un automorphisme de ce revêtement : l'élément a envoie la sphère k sur la sphère $-k$ par l'application antipodale, et l'élément b envoie la sphère $1+k$ sur la sphère $1-k$ par l'application antipodale. Par conséquent, l'élément ab agit comme la translation qui envoie la sphère k sur la sphère $k+2$ (par l'application identité).

(b) Le revêtement correspondant doit être de degré $2m$. On l'obtient en identifiant dans le revêtement précédent la sphère correspondant à l'entier k avec celle correspondant à l'entier $k+2m$, pour tout m, de sorte à obtenir un « collier » de $2m$ sphères, les paires étant bleues et les impaires étant rouges.

(c) Si $H = \langle a \rangle$, alors le revêtement est obtenu en quotientant le revêtement universel par la réflexion par rapport au plan $x = 0$: on obtient une demi-droite de sphères, avec un plan projectif rouge au bout. De même, si $H = \langle b \rangle$, on obtient une demi-droite de sphères avec un plan projectif bleu au bout.

(d) Si $H = \langle a, c^m \rangle$ avec m pair, le revêtement est obtenu en identifiant dans celui de (b) la sphère k avec la sphère $2m-k$ par l'application antipodale : on le voit comme une chaîne de $m-1$ sphères, avec un plan projectif rouge à chaque extrémité. De même, si $H = \langle b, c^m \rangle$ avec m pair, on l'obtient en identifiant la sphère $1+k$ avec la sphère $2m+1-k$ (modulo $2m$) par l'application antipodale : c'est une chaîne de $m-1$ sphères avec un plan projectif bleu à chaque extrémité. Enfin, si $H = \langle a, c^m \rangle$ avec m impair, ce sera une chaîne de $m-1$ sphères avec un plan projectif rouge à une extrémité, et un plan projectif bleu à l'autre.

Exercice 4. Graphes et groupes libres ⋆⋆

1. Soit $p : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ un revêtement d'un graphe $\mathcal{G}$. Notons S' comme l'image réciproque dans $\mathcal{G}'$ de S et A le sous-ensemble des éléments (u, v) de $S' \times S'$ tel que $a = (p(u), p(v)) \in A$ et le relèvement du chemin $\gamma_a : [0,1] \to [0,1] \times \{a\}$ qui part de u arrive en v dans $\mathcal{G}'$.

   Alors $\mathcal{G}'$ est exactement le graphe de sommets S' et d'arêtes A'. On vérifie alors que l'on a une application surjective
$$\psi : \coprod_{s \in S'} \{s\} \coprod_{a \in A'} [0,1] \times \{a\} \to \mathcal{G}'$$
   et qui se factorise en une bijection continue $\mathcal{G}(S', A') \to \mathcal{G}'$. Comme $\mathcal{G}'$ est séparé car $\mathcal{G}$ séparé, étant le quotient d'un espace séparé et compact, et $\mathcal{G}(S', A')$ est compact, alors ψ est un homéomorphisme.

2. L'idée est de remarquer que si l'on écrase une arête avec deux sommets différents, on obtient un nouveau graphe homotopiquement équivalent. Plus généralement, il faut montrer que l'inclusion d'une arête de sommets différents dans un graphe est une *cofibration*.

Definition Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$. L'inclusion $\iota : A \hookrightarrow X$ est une cofibration si pour tout espace topologique Z et toute application $f : [0,1] \times A \cup \{0\} \times X$ continue, il existe $\overline{f} : [0,1] \times X \to Z$ continue qui étend f.

C'est un résultat général alors que si $A \hookrightarrow X$ est une cofibration et A est contractile, alors l'application quotient $X \to X/A$ est une équivalence d'homotopie. En effet, si $H : [0,1] \times A \to A$ est une homotopie entre l'identité de A et une application constante dans A, alors

$$f : [0,1] \times A \cup \{0\} \times X \to X$$

définie par $H \cup Id_X$ admet une extension continue par propriété de la cofibration en $\widetilde{H} : [0,1] \times X \to X$. On vérifie que $\widetilde{H}(1,.) : X \to X$ se factorise en une application continue $F : X/A \to X$ qui est un inverse homotopique de $X \to X/A$.

Dans un graphe $\mathcal{G}$, si a est une arête de sommets différents alors a est contractile et $a \to \mathcal{G}$ est une cofibration. De plus $\mathcal{G}' = \mathcal{G}/a$ est un graphe avec la même caractéristique d'Euler que $\mathcal{G}$. On continue cette opération jusqu'à obtenir un graphe à un seul sommet, le graphe de départ étant supposé connexe. Un graphe où il n'y a qu'un seul sommet et k-arêtes est homéomorphe à un bouquet de k cercles.

3. Le groupe fondamental d'un graphe est donc un groupe libre à un nombre fini de générateurs, par application du théorème de Van Kampen. Soit G un graphe de groupe fondamental L. Le sous-groupe K détermine un revêtement fini M de G à k feuillets, c'est donc un graphe de groupe fondamental égal à K. Ce dernier est donc libre. Remarquer que $\chi(M) = k\chi(G)$. Donc K a $1 - k\chi(G)$ générateurs.

4. Prendre un bouquet de deux cercles et utiliser l'exercice suivant.

Exercice 5. Bouquets de cercles ⋆⋆

https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf page 60

Exercice 6. Espaces topologiques finis ⋆⋆

1. Il y a trois topologies possibles sur un ensemble à deux éléments : la topologie discrète, la topologie grossière, et la topologie pour laquelle un des deux éléments de l'ensemble constitue un ouvert. Le premier n'est pas connexe, mais les deux autres sont même connexes par arcs (le vérifier !). Celui avec la topologie grossière est simplement connexe d'après l'exercice 2 de la feuille 3. Soit maintenant $X = \{a, b\}$ un espace dont les ouverts sont $\emptyset$, $\{a\}$ et $\{a, b\}$. Pour tout $t \in [0,1]$ soit $s \mapsto \gamma_t(s)$ le lacet qui envoie $[0, \frac{s}{2}] \cup [1 - \frac{s}{2}, 1]$ sur b et $]\frac{s}{2}, 1 - \frac{s}{2}[$ sur a. Alors l'application $H : (s,t) \mapsto \gamma_s(t)$ fournit une homotopie de γ_0 vers γ_1, qui est le lacet constant égal à b. Vérifier que le fait que γ_0 soit homotopiquement trivial implique que X est simplement connexe.

   Ces idées permettent également de traiter le cas des ensembles de cardinal 3.

2. S'inspirer de l'exercice sur le bouquet de deux plans projectifs pour construire un revêtement de fibre isomorphe à $\mathbb{Z}$, et montrer qu'il est simplement connexe (utiliser la simple connexité des espaces topologiques de 3 éléments).

3. Construire un espace bien choisi à 5 éléments à partir du précédent, recouvert par deux ouverts avec la même topologie que le précédent, et utiliser Van Kampen.