Classes de Kaledin & critères de formalité

Coline Emprin

Séminaire AGATA

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck

Jeudi 20 avril 2023

Classes de Kaledin & critères de formalité

1. La notion de formalité
2. Structures supérieures
   - Une approche de la formalité comme problème de déformation.
3. Classes de Kaledin
   - Théorie de l'obstruction à la formalité pour n'importe quel anneau de coefficients.
4. Critères de formalité
   - Descentes de formalité
   - Critère de formalité intrinsèque
   - Morphisme tordant & relèvement d'automorphismes

La notion de formalité

Espaces topologiques formels

R : anneau commutatif

Définition

Un espace topologique X est formel s'il existe un zig-zag de quasi-isomorphismes d'algèbres associatives différentielles graduées

$$C^{\bullet}_{\mathrm{sing}}(X;R) \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} \cdots \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} H^{\bullet}_{\mathrm{sing}}(X;R)\ .$$

$\rightarrow$ Provient de la théorie de l'homotopie rationnelle (pour $\mathbb{Q} \subset R$)

X formel $\implies$ La cohomologie $H^{\bullet}_{\mathrm{sing}}(X, \mathbb{Q})$ caractérise entièrement le type d'homotopie rationel de X.

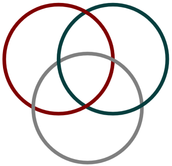
Exemples

→ Espaces formels

- Spheres, espaces projectifs complexes, groupes de Lie
- Variétés kählériennes compacts [DGMS, 1975]

→ Un espace topologique qui n'est pas formel

- Le complémentaire des anneaux borroméens



Formalité d'une structure algébrique

A : complexe de cochaînes de R-modules

(A, ϕ) : structure algébrique différentielle graduée (dg) sur A

$\rightarrow$ une algèbre associative dg,

$\rightarrow$ une algèbre de Lie dg

$\rightarrow$ $\cdots$

Définition

(A, ϕ) est formelle s'il existe un zig-zag de quasi-isomorphismes

$$(A, \phi) \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} \cdots \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} (H(A), \varphi_*) \ ,$$

où φ_* est la structure induite sur $H(A)$.

Exemples

- X formel $= (C^\bullet_{\mathrm{sing}}(X; R), \cup)$ formelle comme algèbre associative dg
- $C(\mathcal{D}_k; \mathbb{R})$ est formelle en tant qu'opérade [Kontsevich, 1999]

Structures supérieures

Rétraction homotopique

Définition

(W, d_W) est un rétract homotopique de (V, d_V) s'il existe des applications

$$\begin{tikzcd} (V, d_V) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (W, d_W) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{id}_V - ip = d_V h + h d_V$ et i est un quasi-isomorphisme.

Proposition

Si R est un corps, la cohomologie $H(A)$ de tout complexe de cochaînes (A, d) est un rétract homotopique :

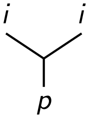
$$\begin{tikzcd} (A, d_A) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (H(A), 0) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd}$$

Transfert de structures algébriques

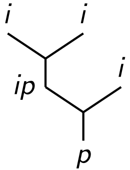
(A, d_A, ϕ) : algèbre associative dg et un rétract homotopique

$$\begin{tikzcd} (A, d_A, \phi) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (H, d_H) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd}$$

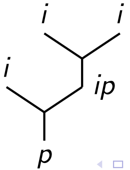
$\rightarrow$ Produit transféré : $\varphi_2 := p \circ \phi \circ i^{\otimes 2} : H^{\otimes 2} \rightarrow H$



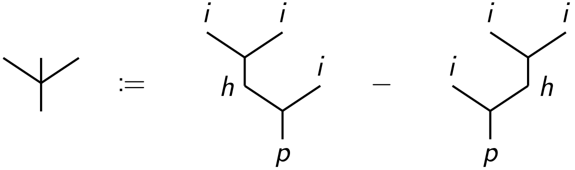
N'est pas associatif en général !



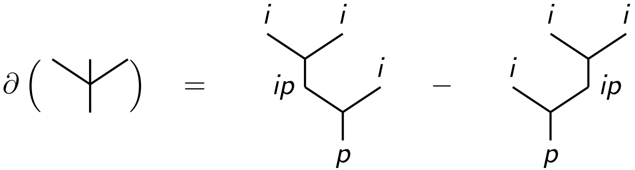
$\neq$



→ $\varphi_3 : H^{\otimes 3} \to H$

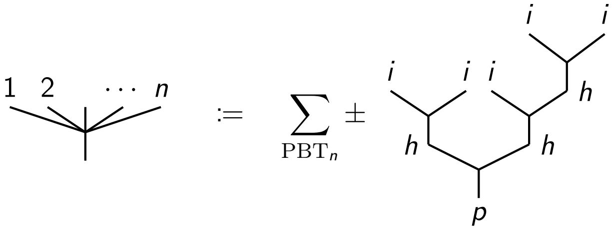


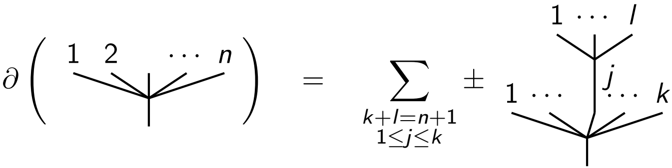
→ Dans $\mathrm{Hom}(H^{\otimes 3}, H)$:



→ φ_2 est associative à l'homotopie φ_3 près.

$\rightarrow \varphi_n : H^{\otimes n} \rightarrow H$, pour tout $n \geq 2$





Algèbres associatives à homotopies près

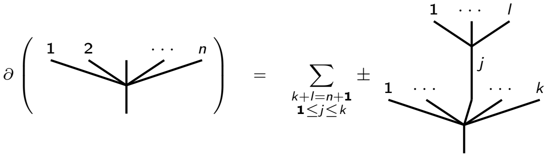
H : complexe de cochaînes de R-modules

Définition

Une structure d'A_∞-algèbre sur H est une collection d'applications

$$\varphi_n : H^{\otimes n} \to H$$

de degré $2 - n$, pour tout $n \geq 2$, telles que



Exemples

- Une algèbre associative (A, ϕ) est une A_∞-algèbre avec $\varphi_n = 0$, $\forall\ n \geq 3$.
- $(H, d_H, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$

Théorème de transfert homotopique

Théorème (Kadeishvili, 1982)

Soient (A, d_A, ϕ) *une structure associative dg et*

$$\begin{tikzcd} (A, d_A, \phi) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (H, d_H) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd}$$

une rétraction homotopique. Il existe une structure d'A_∞*-algèbre sur* H *telle que* p *(et* i*) s'étendent en* A_∞*-quasi-isomorphismes :*

$$(A, d_A, \phi) \rightsquigarrow (H, d_H \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \dots)$$

Morphismes d'A_∞-algèbres

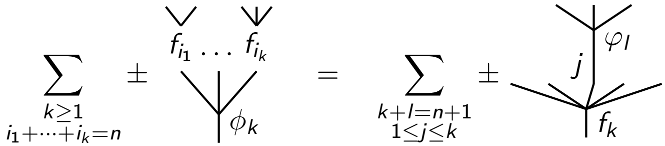
Soient $(A, d_A, \phi_2, \dots)$ et $(H, d_H, \varphi_2, \dots)$ deux A_∞-algèbres.

Définition

Un A_∞-morphisme $f : A \rightsquigarrow H$ est une collection d'applications

$$f_n : A^{\otimes n} \longrightarrow H, \quad n \geq 1 ,$$

de degré $1 - n$, telles que



où $\phi_1 = d_A$ et $\varphi_1 = d_H$.

A_∞-quasi-isomorphismes

Définition

Un A_∞-quasi-isomorphisme $f : A \overset{\sim}{\rightsquigarrow} H$ est un A_∞-morphisme pour lequel $f_1 : A \to H$ est un quasi-isomorphisme.

Proposition (R est un corps de caractéristique zéro)

quasi-isos d'algèbres associatives $\qquad\qquad$ *A_∞-quasi-iso*

$$\exists\,(A,\phi) \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} \cdots \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} (B,\phi') \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\,(A,\phi) \overset{\sim}{\rightsquigarrow} (B,\phi')$$

Corollaire

Une algèbre associative dg (A,ϕ) est formelle si et seulement si

$$\exists\,(A,\phi) \overset{\sim}{\rightsquigarrow} (H(A),\varphi_*)\ .$$

Une autre caractérisation de la formalité

(A, d, ϕ) : algèbre associative dg telle que $H(A)$ est un rétract homotopique

$$\begin{tikzcd}
(A, d, \phi) \arrow[r, rightsquigarrow, "\text{HTT}"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "\text{Formalité}"'] & (H(A), \varphi_*, \varphi_3, \varphi_4, \ldots) \arrow[d, rightsquigarrow, "\exists\, ?"] \\
& (H(A), \varphi_*)
\end{tikzcd}$$

Produits de Massey supérieurs

$\Longrightarrow$ Si les produits de Massey supérieurs s'annulent alors (A, d, ϕ) est formelle.

Définition

- (A, d, ϕ) est jauge formelle si $\exists\, (H(A), \varphi_*, \varphi_3, \varphi_4 \ldots) \overset{\sim}{\rightsquigarrow} (H(A), \varphi_*)$.
- (A, d, ϕ) est jauge n-formelle si

$$\exists\, (H(A), \varphi_*, \varphi_3, \varphi_4 \ldots) \overset{\sim}{\rightsquigarrow} (H(A), \varphi_*, 0, \ldots, 0, \varphi'_{n+1}, \ldots)\ .$$

Classes de Kaledin

Complexe de Hochschild

Structure transférée : $(H(A), \varphi_*, \varphi_3, \varphi_4, \ldots)$

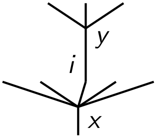
$$\varphi_n \in Hom(H(A)^{\otimes n}, H(A)), \quad |\varphi_n| = 2 - n$$

Complexe de cochaînes de Hochschild :

$$\mathfrak{g} := \prod_{n \geq 1} s^{-n+1} Hom(H(A)^{\otimes n}, H(A))$$

Crochet de Lie : $[x, y] := x \star y - (-1)^{|x||y|} y \star x$

$$x \star y := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)(m-1)}$$



pour $x \in Hom(H(A)^{\otimes n}, H(A))$ et $y \in Hom(H(A)^{\otimes m}, H(A))$.

Une déformation formelle

Structure transférée :

$$(\varphi_*, \varphi_3, \varphi_4, \dots) \in \mathfrak{g} := \prod_{n \geq 1} s^{-n+1} Hom(H(A)^{\otimes n}, H(A))$$

Une déformation formelle :

$$\Phi := \varphi_* + \varphi_3 h + \varphi_4 h^2 + \cdots \in \mathfrak{g}[\![h]\!] := \mathfrak{g} \hat{\otimes} R[\![h]\!]$$

Proposition : $\mathrm{ad}_\Phi := [\Phi, -]$ définit une différentielle sur $\mathfrak{g}[\![h]\!]$

Algèbre de Lie différentielle graduée tordue :

$$\mathfrak{g}[\![h]\!]^\Phi := (\mathfrak{g}[\![h]\!], [-,-], \mathrm{ad}_\Phi)$$

Classes de Kaledin

$$\partial_h \Phi := \varphi_3 + 2\varphi_4 h + 3\varphi_5 h^2 + \cdots \in \mathfrak{g}[\![h]\!]$$

Lemme : $\partial_h \Phi$ est un cycle dans $\mathfrak{g}[\![h]\!]^\Phi := (\mathfrak{g}[\![h]\!], [-,-], \mathrm{ad}_\Phi)$,

$$\mathrm{ad}_\Phi(\partial_h \Phi) := [\Phi, \partial_h \Phi] = 0 \ .$$

Classe de Kaledin :

$$K_\Phi := [\partial_h \Phi] \in H^1\left(\mathfrak{g}[\![h]\!]^\Phi\right) \ .$$

n-ième classe de Kaledin tronquée :

$$K_\Phi^n := \left[\varphi_3 + 2\varphi_4 h + \cdots + (n-2)\varphi_n h^{n-3}\right] \in H^1\left(\left(\mathfrak{g}[\![h]\!]/h^{n-2}\right)^{\widetilde{\Phi}}\right) \ .$$

Classes de Kaledin

Classe de Kaledin :

$$K_\Phi := \left[\varphi_3 + 2\varphi_4 h + 3\varphi_5 h^2 + \cdots\right] \in H^1\left(\mathfrak{g}[\![h]\!]^\Phi\right)$$

n-ième classe de Kaledin tronquée :

$$K_\Phi^n := \left[\varphi_3 + 2\varphi_4 h + \cdots + (n-2)\varphi_n h^{n-3}\right] \in H^1\left(\left(\mathfrak{g}[\![h]\!]/h^{n-2}\right)^{\widetilde{\Phi}}\right)$$

Théorème ([Kaledin, 2007], [Lunts, 2007])

R : $\mathbb{Q}$-algèbre

(A, ϕ) : algèbre associative dg telle que $H(A)$ est un rétract homotopique

- *(A, ϕ) est jauge formelle $\Longleftrightarrow K_\Phi = 0$.*
- *(A, ϕ) est jauge n-formelle $\Longleftrightarrow K_\Phi^n = 0$.*

Classe de Kaledin :

$$K_\Phi := \left[\varphi_3 + 2\varphi_4 h + 3\varphi_5 h^2 + \cdots\right] \in H^1\left(\mathfrak{g}[\![h]\!]^\Phi\right)$$

n-ième classe de Kaledin tronquée :

$$K_\Phi^n := \left[\varphi_3 + 2\varphi_4 h + \cdots + (n-2)\varphi_n h^{n-3}\right] \in H^1\left(\left(\mathfrak{g}[\![h]\!]/h^{n-2}\right)^{\widetilde{\Phi}}\right)$$

Théorème ([Kaledin, 2007], [Lunts, 2007], [Melani–Rubió, 2019])

R : $\mathbb{Q}$-algèbre

$\mathcal{P}$: opérade de Koszul

(A, ϕ) : dg $\mathcal{P}$-algèbre telle que $H(A)$ est un rétract homotopique

- *(A, ϕ) est jauge formelle $\iff K_\Phi = 0$.*
- *(A, ϕ) est jauge n-formelle $\iff K_\Phi^n = 0$.*

Classe de Kaledin :

$$K_\Phi := \left[\varphi_3 + 2\varphi_4 h + 3\varphi_5 h^2 + \cdots\right] \in H^1\left(\mathfrak{g}[\![h]\!]^{\Phi}\right)$$

n-ième classe de Kaledin tronquée :

$$K_\Phi^n := \left[\varphi_3 + 2\varphi_4 h + \cdots + (n-2)\varphi_n h^{n-3}\right] \in H^1\left(\left(\mathfrak{g}[\![h]\!]/h^{n-2}\right)^{\widetilde{\Phi}}\right)$$

Théorème (E., 2023)

R : *anneau commutatif*

$\mathcal{P}$: *opérade colorée, propérade de Koszul*

(A, ϕ) : *dg $\mathcal{P}$-algèbre telle que $H(A)$ est un rétract homotopique*

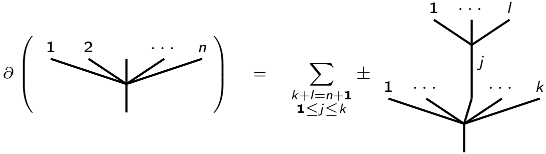
- (A, ϕ) *est jauge formelle* $\iff K_\Phi = 0$.
- (A, ϕ) *est jauge n-formelle* $\iff K_\Phi^n = 0$.

Heuristique

Structures d'A_∞-algèbre sur $H(A)$:

$$\varphi = (\varphi_2, \varphi_3, \dots) \in \mathfrak{g} := \prod_{n \geq 1} s^{-n+1} Hom(H(A)^{\otimes n}, H(A))$$

$$\varphi_n : H^{\otimes n} \to H, \quad |\varphi_n| = 2 - n$$



Éléments de Maurer–Cartan : $\mathrm{MC}(\mathfrak{g}) = \{\varphi \in \mathfrak{g}^1 \mid \varphi \star \varphi = 0\}$

$$x \star y := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)(m-1)} x \circ_i y$$

Structures de A_∞-algèbres sur H(A) $\cong \mathrm{MC}(\mathfrak{g})$

Groupe de jauge $\Gamma := (\mathfrak{g}^0, \mathrm{BCH}, 0)$

Formule de Baker–Campbell–Hausdorff : $\lambda, \mu \in \mathfrak{g}^0$,

$$\mathrm{BCH}(\lambda, \mu) = \lambda + \mu + \tfrac{1}{2}[\lambda, \mu] + \tfrac{1}{12}([\lambda, [\lambda, \mu]] + [\mu, [\mu, \lambda]]) + \cdots$$

Action de jauge :

$$\begin{array}{rcl} \Gamma \times \mathrm{MC}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathrm{MC}(\mathfrak{g}) \\ (\lambda, \varphi) & \longmapsto & \lambda \cdot \varphi := e^{\mathrm{ad}_\lambda}(\varphi) \end{array}$$

Proposition (Dotsenko – Shadrin – Vallette, 2016)

$$\exists\ A_\infty\text{-}\textit{quasi-isomorphisme}\ (H(A), \varphi) \overset{\sim}{\rightsquigarrow} (H(A), \varphi_*)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\exists\ \lambda \in \Gamma\ \textit{tel que}\ \lambda \cdot \varphi = \varphi_*$$

Action de jauge :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times \mathrm{MC}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathrm{MC}(\mathfrak{g}) \\ (\lambda, \varphi) & \longmapsto & \lambda \cdot \varphi := e^{\mathrm{ad}_\lambda}(\varphi) \end{array}$$

Champ de vecteurs Υ_λ sur $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$:

$$\forall\, \lambda \in \Gamma,\ \Upsilon_\lambda(\varphi) := \mathrm{ad}_\varphi(\lambda)$$

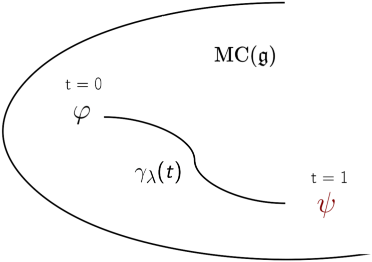
$$\frac{d}{dt}\gamma_\lambda(t) = \Upsilon_\lambda\left(\gamma_\lambda(t)\right)$$

Intégration pour $\gamma_\lambda(0) = \varphi$:

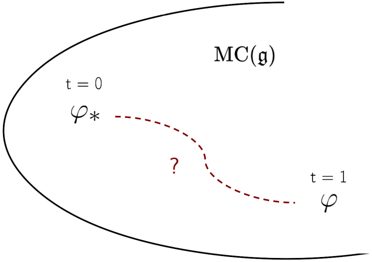
$$\gamma_\lambda(t) = e^{t\,\mathrm{ad}_\lambda}(\varphi)$$

$$\boxed{\lambda \cdot \varphi = \psi \Longleftrightarrow \gamma_\lambda(1) = \psi}$$

$$\boxed{\lambda \cdot \varphi = \psi \Longleftrightarrow \gamma_\lambda(1) = \psi}$$

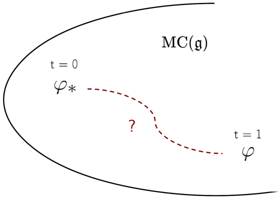


Le cas de la formalité



Est-ce qu'il existe $\lambda \in \Gamma$, tel que $\gamma_\lambda(0) = \varphi_*$ et $\gamma_\lambda(1) = \varphi$?

Est-ce qu'il existe $\lambda \in \Gamma$, tel que $\gamma_\lambda(0) = \varphi_*$ et $\gamma_\lambda(1) = \varphi$?



Tentative : "$\Phi(h) = \varphi_* + \varphi_3 h + \varphi_4 h^2 + \cdots$"

Est-ce qu'il existe $\lambda \in \Gamma$, tel que $\Phi = \gamma_\lambda$?

$$\Phi = \gamma_\lambda \iff \partial_h \Phi = \Upsilon_\lambda(\Phi) := \mathrm{ad}_\Phi(\lambda)$$

$$\iff K_\Phi := [\partial_h \Phi] = 0$$

Critères de formalité

Descentes de formalité

(A, ϕ) : dg $\mathcal{P}$-algèbre telle que $H(A)$ est un rétract homotopique

$H^i(A)$: projectif, de type fini pour tout i.

Q : R-algèbre commutative fidèlement plate

Proposition (E., 2023)

(A, ϕ) jauge n-formelle $\Longleftrightarrow$ $(A \otimes_R Q, \phi \otimes 1)$ jauge n-formelle.

Démonstration

$$\begin{array}{ccc} H^1\left(\mathfrak{g}_{H(A)}[\![h]\!]^{\Phi}\right) \otimes_{R[\![h]\!]} Q[\![h]\!] & \cong & H^1\left(\mathfrak{g}_{H(A\otimes_R Q)}[\![h]\!]^{\Phi\otimes 1}\right) \\ \Cup & & \Cup \\ K_\Phi \otimes 1 = 0 & \Longleftrightarrow & K_{\Phi\otimes 1} = 0 \end{array}$$

Exemples

- $C(\mathcal{D}_k; \mathbb{Q})$ est formelle $\Longleftrightarrow$ $C(\mathcal{D}_k; \mathbb{R})$ est formelle [GSNPR, 2005]
- $\mathbb{Z}_{(\ell)} \subset \mathbb{Z}_\ell$

Formalité intrinsèque

Une $\mathcal{P}$-algèbre (H, φ_*) est dite intrinsèquement formelle si toute $\mathcal{P}$-algèbre (A, ϕ) telle que $(H(A), \varphi_*) = (H, \varphi_*)$ est jauge formelle.

$\mathfrak{g}^{\varphi_*} : (\mathfrak{g}, [-,-], d^{\varphi_*} = [\varphi_*, -])$

Proposition (E., 2023)

$$H^1(\mathfrak{g}^{\varphi_*}) = 0 \implies (H, \varphi_*) \textit{ intrinsèquement formelle.}$$

Démonstration.

Pour tout (A, ϕ) telle que $(H(A), \varphi_*) = (H, \varphi_*)$,

$$K_\Phi = 0 \in H^1\left(\mathfrak{g}[\![h]\!]^\Phi\right) .$$

$\square$

Résultats antérieurs : [Hinich, 2003]

Preuve de Tamarkin de la formalité de Kontsevich

k : corps de caractéristique zéro

A : algèbre polynomiale sur k

Théorème (Hinich, 2003)

Le complexe de cochaînes de Hochschild $sC(A; A)$ est formelle comme algèbre de Lie différentielle graduée.

Démonstration.

- sLie $\subset$ *Gerst* ;
- $(HH^\bullet(A), \varphi_*)$ a une structure d'algèbre de Gerstenhaber ;
- $C(A; A)$ a une structure de $Gerst_\infty$-algèbre induisant φ_* ;
- $(HH^\bullet(A), \varphi_*)$ intrinsèquement formelle comme *Gerst*-algèbre ;

$\rightarrow H^1(\mathfrak{g}^{\varphi_*}) = 0$, où $\mathfrak{g} = \mathrm{Hom}(\overline{Gerst}^{\mathrm{i}}, \mathrm{End}_{HH^\bullet(A)})$.

$\square$

Le morphisme tordant

(A, ϕ) : dg $\mathcal{P}$-algèbre telle que $H(A)$ est un rétract homotopique

α : unité de R.

σ_α : morphisme tordant par α

$\rightarrow$ automorphisme linéaire de $H(A)$ qui agit par $\alpha^k \times$ sur $H^k(A)$.

Théorème (Drummond-Cole – Horel, 2021)

Si σ_α admet un relèvement, i.e. $\exists\ f \in \mathrm{End}(A, \phi)$ t.q. $H(f) = \sigma_\alpha$,

- $\forall k,\ \alpha^k - 1 \in R^\times \implies (A, \phi)$ *est jauge formelle.*
- $\forall k \leq n,\ \alpha^k - 1 \in R^\times \implies (A, \phi)$ *est jauge n-formelle.*

Théorème (Drummond-Cole – Horel, 2021)

Si σ_α admet un relèvement, i.e. $\exists\ f \in \mathrm{End}(A, \phi)$ t.q. $H(f) = \sigma_\alpha$,

- $\forall k,\ \alpha^k - 1 \in R^\times \implies (A, \phi)$ *est jauge formelle.*
- $\forall k \leq n,\ \alpha^k - 1 \in R^\times \implies (A, \phi)$ *est jauge n-formelle.*

Heuristique :

→ Les produits de Massey supérieurs sont compatibles avec le relèvement.

→ Ils mélangent la multiplication par α^l et la multiplication par α^k pour $l \neq k$.

→ Ils sont forcément triviaux.

Résultats antérieurs : [DGMS, 1975], [Sullivan, 1977], [GSNPR, 2005]

Complémentaire d'arrangements de sous-espaces

X : complementaire d'arrangement d'hyperplans sur $\mathbb{C}$
$\to$ complémentaire d'une collection finie d'hyperplans affines dans $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.

K : extension finie de $\mathbb{Q}_p$

q : ordre du corps de résidus de l'anneau des entiers de K

ℓ : nombre premier différent de p

s : ordre de q dans $\mathbb{F}_\ell^\times$

Proposition (Cirici – Horel, 2022)

Si X est défini sur K, i.e. $\exists\ K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\exists\ \mathcal{X}$ un complémentaire d'arrangement d'hyperplans sur K t.q. $\mathcal{X} \times_K \mathbb{C} \cong X$, alors $C^\bullet(X_{an}, \mathbb{Z}_\ell)$ est jauge $(s-1)$-formelle.

Proposition (Cirici – Horel, 2022)

Si X est défini sur K, i.e. $\exists\ K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\exists\ \mathcal{X}$ un complémentaire d'arrangement d'hyperplans sur K t.q. $\mathcal{X} \times_K \mathbb{C} \cong X$, alors $C^\bullet(X_{an}, \mathbb{Z}_\ell)$ est jauge $(s-1)$-formelle.

Heuristic :

- $\rightarrow$ $C^\bullet(X_{an}, \mathbb{Z}_\ell) \cong C^\bullet_{et}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell)$, [Artin].
- $\rightarrow$ L'action d'un Frobenius sur $H_{et}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell)$ est σ_q , [Kim, 1994].

Descente de formalité $\Longrightarrow$ $C^\bullet(X_{an}, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ jauge $(s-1)$-formelle.

Relèvement d'automorphismes

(A, ϕ) : dg $\mathcal{P}$-algèbre telle que $H(A)$ est un rétract homotopique

Théorème (E., 2023)

Soit $u \in \mathrm{Aut}(H(A), \varphi_*)$ admettant un relèvement.

1. *Si $\mathrm{Ad}_u - \mathrm{id}$ est inversible sur les éléments de degré k pour tout $k < n$, alors (A, ϕ) est jauge n-formelle.*
2. *Si $\mathrm{Ad}_u - \mathrm{id}$ is inversible, alors (A, ϕ) est jauge formelle.*

Relèvement d'automorphismes

R : corps

(A, ϕ) : dg $\mathcal{P}$-algèbre telle que $H(A)$ est un rétract homotopique et de dimension finie

Corollaire

Soit $u \in \mathrm{Aut}(H(A), \varphi_*)$ *tel que* $\forall\ k < n$, *et* $\forall\ (k_1, \dots, k_p)$,

$$\mathrm{Spec}(u_{k_1+\dots+k_p+k}) \cap \mathrm{Spec}(u_{k_1} \otimes \cdots \otimes u_{k_p}) = \varnothing\ ,$$

où $u_i := u_{|H^i(A)}$. *Si* u *admet un relèvement au niveau des chaînes alors* (A, ϕ) *est jauge* n*-formelle.*

Frobenius & nombres de Weil

K : extension finie de $\mathbb{Q}_p$

q : ordre du corps de résidus de l'anneau des entiers de K

ℓ : nombre premier différent de p

X : schéma projectif lisse sur K

Définition

$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est un nombre de Weil de poids n si

$$\forall\, \iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}, \quad |\iota(\alpha)| = q^{n/2}\ .$$

Théorème (Deligne, 1974)

Pour tout n, les valeurs propres de l'action d'un Frobenius sur $H^n_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ sont des nombres de Weil de poids n.

Corollary

Pour tout schéma projectif lisse sur K, $C^\bullet(X_{an}, \mathbb{Q}_\ell)$ est formelle.

Démonstration.

- $C^\bullet(X_{an}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} C^\bullet_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$
- Soit u l'action d'un Frobenius sur $H^\bullet_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ et fixons $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$.
- Pour tous $k \geq 1$, $(k_1, \ldots, k_p)$ et $s := k_1 + \cdots + k_p$,

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}(u_{s+k}) & \cap & \mathrm{Spec}(u_{k_1} \otimes \cdots \otimes u_{k_p}) & = \varnothing . \\ \Cup & & \Cup & \\ \alpha & & \beta & \\ |\iota(\alpha)| = q^{\frac{s+k}{2}} & > & |\iota(\beta)| = q^{\frac{s}{2}} & \end{array}$$

$\square$

Résultats antérieurs : [Deligne, 1980], [GSNPR, 2005]

Merci pour votre attention !