



Classes de Kaledin & critères de formalité

Coline Emprin

Séminaire de l'équipe GAGALie

Laboratoire de Mathématiques et Applications - Université de Poitiers

Jeudi 14 novembre 2023

Classes de Kaledin & critères de formalité

1. La notion de formalité

2. Structures supérieures

- Une approche de la formalité comme problème de déformation.

3. Classes de Kaledin

- Théorie de l'obstruction à la formalité pour n'importe quel anneau de coefficients.

4. Critères de formalité

- Descentes de formalité
- Critère de formalité intrinsèque
- Morphisme tordant & relèvement d'automorphismes



La notion de formalité



Espaces topologiques formels

R : anneau commutatif

Définition

Un espace topologique X est **formel** s'il existe un zig-zag de quasi-isomorphismes d'algèbres associatives différentielles graduées

$$C_{\text{sing}}^{\bullet}(X; R) \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} \cdots \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} H_{\text{sing}}^{\bullet}(X; R) .$$

→ Provient de la théorie de l'homotopie rationnelle (pour $\mathbb{Q} \subset R$)

X formel $\implies$ La cohomologie $H_{\text{sing}}^{\bullet}(X, \mathbb{Q})$ caractérise entièrement le type d'homotopie rationnel de X .

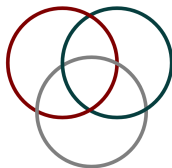
Exemples

→ Espaces formels

- Spheres, espaces projectifs complexes, groupes de Lie
- Variétés kählériennes compacts [DGMS, 1975]

→ Un espace topologique qui n'est pas formel

- Le complémentaire des anneaux borroméens



Formalité d'une structure algébrique

A : complexe de cochaînes de R -modules

(A, ϕ) : structure algébrique différentielle graduée (dg) sur A

- une algèbre associative dg,
- une algèbre de Lie dg
- ...

Définition

(A, ϕ) est **formelle** s'il existe un zig-zag de quasi-isomorphismes

$$(A, \phi) \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} \dots \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} (H(A), \varphi_*) ,$$

où φ_* est la structure induite sur $H(A)$.

Exemples

- X formel $= (C_{\text{sing}}^\bullet(X; R), \cup)$ formelle comme algèbre associative dg
- $C(\mathcal{D}_k; \mathbb{R})$ est formelle en tant qu'opérade [Kontsevich, 1999]



Structures supérieures



Rétraction homotopique

Définition

(W, d_W) est un **rétract homotopique** de (V, d_V) s'il existe des applications

$$h \circlearrowleft (V, d_V) \begin{matrix} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{i} \end{matrix} (W, d_W)$$

où $\text{id}_V - ip = d_V h + h d_V$ et i est un quasi-isomorphisme.

Proposition

Si R est un corps, la cohomologie $H(A)$ de tout complexe de cochaînes (A, d) est un rétract homotopique :

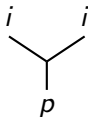
$$h \circlearrowleft (A, d_A) \begin{matrix} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{i} \end{matrix} (H(A), 0)$$

Transfert de structures algébriques

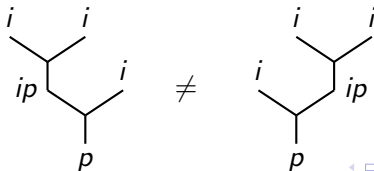
(A, d_A, ϕ) : algèbre associative dg et un rétract homotopique

$$h \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array} (A, d_A, \phi) \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{i} \end{array} (H, d_H)$$

→ Produit transféré : $\varphi_2 := p \circ \phi \circ i^{\otimes 2} : H^{\otimes 2} \rightarrow H$



N'est pas associatif en général !



$$\rightarrow \varphi_3 : H^{\otimes 3} \rightarrow H$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} := \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ h \quad \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \end{array} - \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ i \quad \quad h \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \end{array}$$

$$\rightarrow \text{Dans } \text{Hom}(H^{\otimes 3}, H) :$$

$$\partial \left(\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \right) = \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ ip \quad \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \end{array} - \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ i \quad \quad ip \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \end{array}$$

$$\rightarrow \varphi_2 \text{ est associative à l'homotopie } \varphi_3 \text{ près.}$$

→ $\varphi_n : H^{\otimes n} \rightarrow H$, pour tout $n \geq 2$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \dots \quad n \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ | \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} := \sum_{\text{PBT}_n} \pm \begin{array}{c} i \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ i \quad i \quad i \quad h \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ h \quad h \quad h \quad p \end{array}$$

$$\partial \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \dots \quad n \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ | \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right) = \sum_{\substack{k+l=n+1 \\ 1 \leq j \leq k}} \pm \begin{array}{c} 1 \quad \dots \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \quad \dots \quad k \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

Algèbres associatives à homotopies près

H : complexe de cochaînes de R -modules

Définition

Une structure d' A_∞ -algèbre sur H est une collection d'applications

$$\varphi_n : H^{\otimes n} \rightarrow H$$

de degré $2 - n$, pour tout $n \geq 2$, telles que

$$\partial \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \dots \quad n \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right) = \sum_{\substack{k+l=n+1 \\ 1 \leq j \leq k}} \pm \begin{array}{c} 1 \quad \dots \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad \dots \quad k \end{array}$$

Exemples

- Une algèbre associative (A, ϕ) est une A_∞ -algèbre avec $\varphi_n = 0, \forall n \geq 3$.
- $(H, d_H, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$

Théorème de transfert homotopique

Théorème (Kadeishvili, 1982)

Soient (A, d_A, ϕ) une structure associative dg et

$$h \circlearrowleft (A, d_A, \phi) \begin{matrix} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{i} \end{matrix} (H, d_H)$$

une rétraction homotopique. Il existe une structure d' A_∞ -algèbre sur H telle que p (et i) s'étendent en A_∞ -quasi-isomorphismes :

$$(A, d_A, \phi) \rightsquigarrow (H, d_H, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \dots)$$

Morphismes d' A_∞ -algèbres

Soient $(A, d_A, \phi_2, \dots)$ et $(H, d_H, \varphi_2, \dots)$ deux A_∞ -algèbres.

Définition

Un A_∞ -morphisme $f : A \rightsquigarrow H$ est une collection d'applications

$$f_n : A^{\otimes n} \longrightarrow H, \quad n \geq 1,$$

de degré $1 - n$, telles que

$$\sum_{\substack{k \geq 1 \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \pm \begin{array}{c} \vee \quad \vee \\ f_{i_1} \dots f_{i_k} \\ | \\ \phi_k \end{array} = \sum_{\substack{k+l=n+1 \\ 1 \leq j \leq k}} \pm \begin{array}{c} \vee \quad \vee \\ \quad \quad \varphi_l \\ | \quad j \\ f_k \end{array}$$

où $\phi_1 = d_A$ et $\varphi_1 = d_H$.

A_∞ -quasi-isomorphismes

Définition

Un A_∞ -quasi-isomorphisme $f : A \xrightarrow{\sim} H$ est un A_∞ -morphisme pour lequel $f_1 : A \rightarrow H$ est un quasi-isomorphisme.

Proposition (R est un corps de caractéristique zéro)

quasi-isos d'algèbres associatives

A_∞ -quasi-iso

$$\exists (A, \phi) \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} \cdots \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} (B, \phi') \iff \exists (A, \phi) \xrightarrow{\sim} (B, \phi')$$

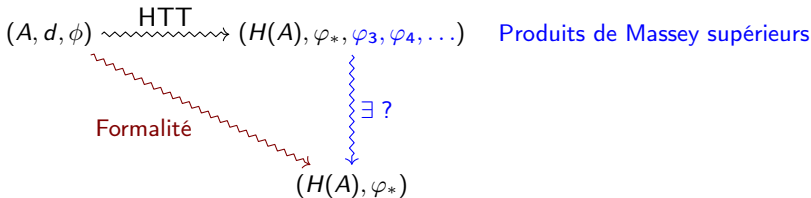
Corollaire

Une algèbre associative dg (A, ϕ) est formelle si et seulement si

$$\exists (A, \phi) \xrightarrow{\sim} (H(A), \varphi_*) .$$

Une autre caractérisation de la formalité

(A, d, ϕ) : algèbre associative dg telle que $H(A)$ est un rétract homotopique



$\implies$ Si les produits de Massey supérieurs s'annulent alors (A, d, ϕ) est formelle.

Définition

- (A, d, ϕ) est **jauge formelle** si $\exists (H(A), \varphi_*, \varphi_3, \varphi_4 \dots) \rightsquigarrow (H(A), \varphi_*)$.
- (A, d, ϕ) est **jauge n -formelle** si

$$\exists (H(A), \varphi_*, \varphi_3, \varphi_4 \dots) \rightsquigarrow (H(A), \varphi_*, 0, \dots, 0, \varphi'_{n+1}, \dots) .$$



Classes de Kaledin



Complexe de Hochschild

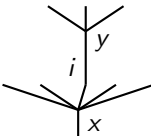
Structure transférée : $(H(A), \varphi_*, \varphi_3, \varphi_4, \dots)$

$$\varphi_n \in \text{Hom}(H(A)^{\otimes n}, H(A)), \quad |\varphi_n| = 2 - n$$

Complexe de cochaînes de Hochschild :

$$\mathfrak{g} := \prod_{n \geq 1} s^{-n+1} \text{Hom}(H(A)^{\otimes n}, H(A))$$

Crochet de Lie : $[x, y] := x \star y - (-1)^{|x||y|} y \star x$

$$x \star y := \sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(m-1)} \text{diagram}$$


pour $x \in \text{Hom}(H(A)^{\otimes n}, H(A))$ et $y \in \text{Hom}(H(A)^{\otimes m}, H(A))$.

Une déformation formelle

Structure transférée :

$$(\varphi_*, \varphi_3, \varphi_4, \dots) \in \mathfrak{g} := \prod_{n \geq 1} s^{-n+1} \operatorname{Hom}(H(A)^{\otimes n}, H(A))$$

Une déformation formelle :

$$\Phi := \varphi_* + \varphi_3 \hbar + \varphi_4 \hbar^2 + \dots \in \mathfrak{g}[[\hbar]] := \mathfrak{g} \hat{\otimes} R[[\hbar]]$$

Proposition : $\operatorname{ad}_\Phi := [\Phi, -]$ définit une différentielle sur $\mathfrak{g}[[\hbar]]$

Algèbre de Lie différentielle graduée tordue :

$$\mathfrak{g}[[\hbar]]^\Phi := (\mathfrak{g}[[\hbar]], [-, -], \operatorname{ad}_\Phi)$$

Classes de Kaledin

$$\partial_{\hbar}\Phi := \varphi_3 + 2\varphi_4\hbar + 3\varphi_5\hbar^2 + \cdots \in \mathfrak{g}[[\hbar]]$$

Lemme : $\partial_{\hbar}\Phi$ est un cycle dans $\mathfrak{g}[[\hbar]]^{\Phi} := (\mathfrak{g}[[\hbar]], [-, -], \text{ad}_{\Phi})$,

$$\text{ad}_{\Phi}(\partial_{\hbar}\Phi) := [\Phi, \partial_{\hbar}\Phi] = 0 .$$

Classe de Kaledin :

$$K_{\Phi} := [\partial_{\hbar}\Phi] \in H^1\left(\mathfrak{g}[[\hbar]]^{\Phi}\right) .$$

n -ième classe de Kaledin tronquée :

$$K_{\Phi}^n := [\varphi_3 + 2\varphi_4\hbar + \cdots + (n-2)\varphi_n\hbar^{n-3}] \in H^1\left((\mathfrak{g}[[\hbar]]/\hbar^{n-2})^{\tilde{\Phi}}\right) .$$

Classes de Kaledin

Classe de Kaledin :

$$K_{\Phi} := [\varphi_3 + 2\varphi_4\hbar + 3\varphi_5\hbar^2 + \dots] \in H^1 \left(\mathfrak{g}[[\hbar]]^{\Phi} \right)$$

n -ième classe de Kaledin tronquée :

$$K_{\Phi}^n := [\varphi_3 + 2\varphi_4\hbar + \dots + (n-2)\varphi_n\hbar^{n-3}] \in H^1 \left((\mathfrak{g}[[\hbar]]/\hbar^{n-2})^{\tilde{\Phi}} \right)$$

Théorème ([Kaledin, 2007], [Lunts, 2007])

R : $\mathbb{Q}$ -algèbre

(A, ϕ) : algèbre assoc dg t.q. $H(A)$ soit un rétract homotopique

- (A, ϕ) est jauge formelle $\iff K_{\Phi} = 0$.
- (A, ϕ) est jauge n -formelle $\iff K_{\Phi}^n = 0$.

Classe de Kaledin :

$$K_{\Phi} := [\varphi_3 + 2\varphi_4\hbar + 3\varphi_5\hbar^2 + \cdots] \in H^1(\mathfrak{g}[[\hbar]]^{\Phi})$$

n -ième classe de Kaledin tronquée :

$$K_{\Phi}^n := [\varphi_3 + 2\varphi_4\hbar + \cdots + (n-2)\varphi_n\hbar^{n-3}] \in H^1\left((\mathfrak{g}[[\hbar]]/\hbar^{n-2})^{\tilde{\Phi}}\right)$$

Théorème ([Kaledin, 2007], [Lunts, 2007], [Melani–Rubió, 2019])

R : $\mathbb{Q}$ -algèbre

$\mathcal{P}$: opérade de Koszul

(A, ϕ) : dg $\mathcal{P}$ -algèbre telle que $H(A)$ soit un rétract homotopique

- (A, ϕ) est jauge formelle $\iff K_{\Phi} = 0$.
- (A, ϕ) est jauge n -formelle $\iff K_{\Phi}^n = 0$.

Classe de Kaledin :

$$K_{\Phi} := [\varphi_3 + 2\varphi_4\hbar + 3\varphi_5\hbar^2 + \cdots] \in H^1(\mathfrak{g}[[\hbar]]^{\Phi})$$

n -ième classe de Kaledin tronquée :

$$K_{\Phi}^n := [\varphi_3 + 2\varphi_4\hbar + \cdots + (n-2)\varphi_n\hbar^{n-3}] \in H^1\left((\mathfrak{g}[[\hbar]]/\hbar^{n-2})^{\tilde{\Phi}}\right)$$

Théorème (E., 2023)

R : anneau commutatif

$\mathcal{P}$: propérade ou opérade colorée

(A, ϕ) : dg $\mathcal{P}$ -algèbre telle que $H(A)$ soit un rétract homotopique

- (A, ϕ) est jauge formelle $\iff K_{\Phi} = 0$.
- (A, ϕ) est jauge n -formelle $\iff K_{\Phi}^n = 0$.



Critères de formalité



Descentes de formalité

(A, ϕ) : dg $\mathcal{P}$ -algèbre telle que $H(A)$ est un rétract homotopique

$H^i(A)$: projectif, de type fini pour tout i .

S : R -algèbre commutative fidèlement plate

Proposition (E., 2023)

(A, ϕ) jauge n -formelle $\iff (A \otimes_R S, \phi \otimes 1)$ jauge n -formelle.

Démonstration

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(\mathfrak{g}_{H(A)}[[\hbar]]^\Phi) \otimes_{R[[\hbar]]} S[[\hbar]] & \cong & H^1(\mathfrak{g}_{H(A \otimes_R S)}[[\hbar]]^{\Phi \otimes 1}) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 K_\Phi \otimes 1 = 0 & \iff & K_{\Phi \otimes 1} = 0
 \end{array}$$

Exemples

- $C(\mathcal{D}_k; \mathbb{Q})$ est formelle $\iff C(\mathcal{D}_k; \mathbb{R})$ est formelle [GSNPR, 2005]
- $\mathbb{Z}_{(\ell)} \subset \mathbb{Z}_\ell$

Formalité intrinsèque

Une $\mathcal{P}$ -algèbre (H, φ_*) est dite **intrinsèquement formelle** si toute $\mathcal{P}$ -algèbre (A, ϕ) telle que $(H(A), \varphi_*) = (H, \varphi_*)$ est jauge formelle.

$$\mathfrak{g}^{\varphi_*} : (\mathfrak{g}, [-, -], d^{\varphi_*} = [\varphi_*, -])$$

Proposition (E., 2023)

$$H^1(\mathfrak{g}^{\varphi_*}) = 0 \implies (H, \varphi_*) \text{ intrinsèquement formelle.}$$

Démonstration.

Pour tout (A, ϕ) telle que $(H(A), \varphi_*) = (H, \varphi_*)$,

$$K_\Phi = 0 \in H^1 \left(\mathfrak{g}[[\hbar]]^\Phi \right) .$$



Résultats antérieurs : [Hinich, 2003]

Preuve de Tamarkin de la formalité de Kontsevich

k : corps de caractéristique zéro

A : algèbre polynomiale sur k

Théorème (Hinich, 2003)

Le complexe de cochaînes de Hochschild $sC(A; A)$ est formelle comme algèbre de Lie différentielle graduée.

Démonstration.

- $s\text{Lie} \subset \text{Gerst}$;
- $(HH^\bullet(A), \varphi_*)$ a une structure d'algèbre de Gerstenhaber ;
- $C(A; A)$ a une structure de Gerst_∞ -algèbre induisant φ_* ;
- $(HH^\bullet(A), \varphi_*)$ intrinsèquement formelle comme Gerst -algèbre ;
 $\rightarrow H^1(\mathfrak{g}^{\varphi_*}) = 0$, où $\mathfrak{g} = \text{Hom}(\overline{\text{Gerst}}^i, \text{End}_{HH^\bullet(A)})$.



Le morphisme tordant

(A, ϕ) : dg $\mathcal{P}$ -algèbre telle que $H(A)$ est un rétract homotopique

α : unité de R .

σ_α : **morphisme tordant** par α

→ automorphisme linéaire de $H(A)$ qui agit par $\alpha^k \times$ sur $H^k(A)$.

Théorème (Drummond-Cole – Horel, 2021)

Si σ_α admet un relèvement, i.e. $\exists f \in \text{End}(A, \phi)$ t.q. $H(f) = \sigma_\alpha$,

- $\forall k, \alpha^k - 1 \in R^\times \implies (A, \phi)$ est *jauge formelle*.
- $\forall k \leq n, \alpha^k - 1 \in R^\times \implies (A, \phi)$ est *jauge n -formelle*.

Théorème (Drummond-Cole – Horel, 2021)

Si σ_α admet un relèvement, i.e. $\exists f \in \text{End}(A, \phi)$ t.q. $H(f) = \sigma_\alpha$,

- $\forall k, \alpha^k - 1 \in R^\times \implies (A, \phi)$ est jauge formelle.
- $\forall k \leq n, \alpha^k - 1 \in R^\times \implies (A, \phi)$ est jauge n -formelle.

Heuristique :

- Les produits de Massey supérieurs sont compatibles avec le relèvement.
- Ils mélangent la multiplication par α^l et la multiplication par α^k pour $l \neq k$.
- Ils sont forcément triviaux.

Résultats antérieurs : [DGMS, 1975], [Sullivan, 1977], [GSNPR, 2005]

Complémentaire d'arrangements de sous-espaces

X : complémentaire d'arrangement d'hyperplans sur $\mathbb{C}$

→ complémentaire d'une collection finie d'hyperplans affines dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$.

K : extension finie de $\mathbb{Q}_p$

q : ordre du corps résiduel de l'anneau des entiers de K

ℓ : nombre premier différent de p

s : ordre de q dans $\mathbb{F}_{\ell}^{\times}$

Proposition (Cirici – Horel, 2022)

Si X est défini sur K , i.e. $\exists K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\exists \mathcal{X}$ un complémentaire d'arrangement d'hyperplans sur K t.q. $\mathcal{X} \times_K \mathbb{C} \cong X$, alors $C^{\bullet}(X_{an}, \mathbb{Z}_{\ell})$ est jauge $(s-1)$ -formelle.

Proposition (Cirici – Horel, 2022)

Si X est défini sur K , i.e. $\exists K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\exists \mathcal{X}$ un complémentaire d'arrangement d'hyperplans sur K t.q. $\mathcal{X} \times_K \mathbb{C} \cong X$, alors $C^\bullet(X_{an}, \mathbb{Z}_\ell)$ est jauge $(s-1)$ -formelle.

Heuristic :

- $C^\bullet(X_{an}, \mathbb{Z}_\ell) \cong C_{et}^\bullet(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell)$, [Artin].
- L'action d'un Frobenius sur $H_{et}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell)$ est σ_q , [Kim, 1994].

Descente de formalité $\implies C^\bullet(X_{an}, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ jauge $(s-1)$ -formelle.

Relèvement d'automorphismes

(A, ϕ) : dg $\mathcal{P}$ -algèbre telle que $H(A)$ est un rétract homotopique

Théorème (E., 2023)

Soit $u \in \text{Aut}(H(A), \varphi_*)$ admettant un relèvement.

1. Si $\text{Ad}_u - \text{id}$ est inversible sur les éléments de degré k pour tout $k < n$, alors (A, ϕ) est jauge n -formelle.
2. Si $\text{Ad}_u - \text{id}$ is inversible, alors (A, ϕ) est jauge formelle.

Relèvement d'automorphismes

R : corps

(A, ϕ) : dg $\mathcal{P}$ -algèbre telle que $H(A)$ est un rétract homotopique et de dimension finie

Corollaire

Soit $u \in \text{Aut}(H(A), \varphi_*)$ tel que $\forall k < n$, et $\forall (k_1, \dots, k_p)$,

$$\text{Spec}(u_{k_1+\dots+k_p+k}) \cap \text{Spec}(u_{k_1} \otimes \dots \otimes u_{k_p}) = \emptyset ,$$

où $u_i := u|_{H^i(A)}$. Si u admet un relèvement au niveau des chaînes alors (A, ϕ) est jauge n -formelle.

Frobenius & nombres de Weil

K : extension finie de $\mathbb{Q}_p$

q : ordre du corps résiduel de l'anneau des entiers de K

ℓ : nombre premier différent de p

X : schéma projectif lisse sur K

Définition

$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est un **nombre de Weil de poids n** si

$$\forall \iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}, \quad |\iota(\alpha)| = q^{n/2}.$$

Théorème (Deligne, 1974)

Pour tout n , les valeurs propres de l'action d'un Frobenius sur $H_{\text{et}}^n(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ sont des nombres de Weil de poids n .

Corollary

Pour tout schéma projectif lisse sur K , $C^\bullet(X_{an}, \mathbb{Q}_\ell)$ est formelle.

Démonstration.

- $C^\bullet(X_{an}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} C_{\text{et}}^\bullet(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$
- Soit u l'action d'un Frobenius sur $H_{\text{et}}^\bullet(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ et fixons $\iota : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \hookrightarrow \mathbb{C}$.
- Pour tous $k \geq 1$, $(k_1, \dots, k_p)$ et $s := k_1 + \dots + k_p$,

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(u_{s+k}) & \cap & \text{Spec}(u_{k_1} \otimes \dots \otimes u_{k_p}) = \emptyset. \\
 \color{red}{\Psi} & & \color{blue}{\Psi} \\
 \color{red}{\alpha} & & \color{blue}{\beta} \\
 |\iota(\alpha)| = q^{\frac{s+k}{2}} & > & |\iota(\beta)| = q^{\frac{s}{2}}
 \end{array}$$



Résultats antérieurs : [Deligne, 1980], [GSNPR, 2005]



Merci pour votre attention !

