

TD0 Rappels de topologie

Applications du cours ★ à préparer en l'avance et corriger en début de séance
 Pour s'entraîner et approfondir ★★ à traiter pendant la séance
 Pour aller plus loin ★★★ facultatifs

Exercice 1. Espaces localement connexes ★

Un espace X est dit *localement connexe* si tout point $x \in X$ admet une base \mathcal{B}_x de voisinages connexes.

1. Montrer qu'un espace X est localement connexe si et seulement si toute composante connexe d'un ouvert U de X est un ouvert de X .
2. Donner un exemple d'espace localement connexe dont l'adhérence ne l'est pas.
3. L'intersection de deux espaces localement connexes est-elle forcément localement connexe ?

Exercice 2. Écrasements et quotients ★

Soient X un espace topologique et \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur X . On note X/\mathcal{R} l'espace quotient. Par exemple, si $A \subset X$ un sous-ensemble, on notera X/A le quotient de X par la relation

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } x, y \in A \text{ ou } x = y.$$

1. Montrer que X est séparé si et seulement si sa diagonale $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X, x \in X\}$ est fermée dans le produit $X \times X$.
2. Soit $\Gamma_{\mathcal{R}} := \{(x, y) \in X \times X \mid x\mathcal{R}y\}$ le graphe de la relation \mathcal{R} . Montrer que
 - (a) si X/\mathcal{R} est séparé, alors $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est fermé dans $X \times X$;
 - (b) si $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est fermé dans $X \times X$ et la projection $X \rightarrow X/\mathcal{R}$ est ouverte alors X/\mathcal{R} est séparé.
3. On suppose que X est séparé et que A est compact. Montrer que X/A est séparé.
4. Trouver un espace topologique séparé X et un sous-espace A de X tel que X/A soit non séparé.

Exercice 3. Exemples fondamentaux d'espaces topologiques ★

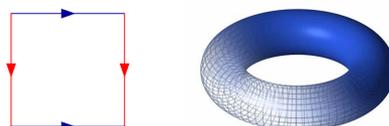
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère \mathbb{D}^n le disque unité fermé de \mathbb{R}^n et $\mathbb{S}^{n-1} := \partial\mathbb{D}^n$ la sphere unité. Montrer que $\mathbb{D}^n/\partial\mathbb{D}^n$ est homéomorphe à \mathbb{S}^n .
2. Le cône de X et sa suspension sont définis respectivement par les espaces quotients suivant ;

$$CX := (X \times [0, 1]) / (X \times \{0\}) \quad \text{et} \quad \Sigma X := CX / \pi(X \times \{1\}),$$

où $\pi : X \times [0, 1] \rightarrow CX$ est la projection. Montrer qu'il existe des homéomorphismes

$$C\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{D}^n \quad \text{et} \quad \Sigma\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n .$$

3. On définit le tore comme l'espace topologique \mathbb{T} quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, y)$ pour tous $x, y \in [0, 1]$. Montrer que \mathbb{T} est homéomorphe aux espaces suivants :
 - (a) le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$,
 - (b) le quotient de \mathbb{R}^2 sous l'action du groupe discret \mathbb{Z}^2 agissant par translations (de vecteurs non tous colinéaires),
 - (c) le tore de révolution dans \mathbb{R}^3 (c'est-à-dire, l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 qui sont image d'un point du cercle du plan $\{y = 0\}$ de centre $(2, 0, 0)$ et de rayon 1 par une rotation d'axe (Oz)).



Exercice 4. Bouquets d'espaces $\star \star$

Pour $(X_i, x_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés, on note $\bigvee_{i \in I} X_i$ l'espace, appelé bouquet des X_i , obtenu à partir de l'union disjointe des X_i en identifiant tous les points x_i .

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut voir \mathbb{S}^{n-1} comme sous-espace de \mathbb{S}^n (son « équateur ») par l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$. Montrer que $\mathbb{S}^n / \mathbb{S}^{n-1}$ est un bouquet de deux sphères de dimension n .
2. La boucle d'oreille hawaïenne est le sous-ensemble $H \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des cercles de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$, pour les entiers $n \geq 1$. Soit $(\mathbb{S}_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de copies de \mathbb{S}^1 (avec un point distingué). Montrer que $\bigvee_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_i^1$ n'est pas homéomorphe à H .

