TD0 Rappels de topologie

Applications du cours $\star$	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir $\star\star$	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin $\star\star\star$	*facultatifs*

Exercice 1. Espaces localement connexes $\star$

Un espace X est dit *localement connexe* si tout point $x \in X$ admet une base $\mathcal{B}_x$ de voisinages connexes.

1. Montrer qu'un espace X est localement connexe si et seulement si toute composante connexe d'un ouvert U de X est un ouvert de X.
2. Donner un exemple d'espace localement connexe dont l'adhérence ne l'est pas.
3. L'intersection de deux espaces localement connexes est-elle forcément localement connexe ?

Exercice 2. Écrasements et quotients $\star$

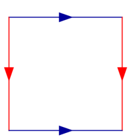
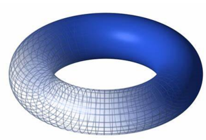
Soient X un espace topologique et $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X. On note $X/\mathcal{R}$ l'espace quotient. Par exemple, si $A \subset X$ un sous-ensemble, on notera X/A le quotient de X par la relation

$$x\mathcal{R}y \quad \text{si et seulement si} \quad x, y \in A \quad \text{ou} \quad x = y.$$

1. Montrer que X est séparé si et seulement si sa diagonale $\Delta_X = \{(x,x) \in X \times X, x \in X\}$ est fermée dans le produit $X \times X$.
2. Soit $\Gamma_{\mathcal{R}} \coloneqq \{(x,y) \in X \times X \mid x\mathcal{R}y\}$ le graphe de la relation $\mathcal{R}$. Montrer que
   (a) si $X/\mathcal{R}$ est séparé, alors $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est fermé dans $X \times X$;
   (b) si $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est fermé dans $X \times X$ et la projection $X \twoheadrightarrow X/\mathcal{R}$ est ouverte alors $X/\mathcal{R}$ est séparé.
3. On suppose que X est séparé et que A est compact. Montrer que X/A est séparé.
4. Trouver un espace topologique séparé X et un sous-espace A de X tel que X/A soit non séparé.

Exercice 3. Exemples fondamentaux d'espaces topologiques $\star$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathbb{D}^n$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}^{n-1} \coloneqq \partial\mathbb{D}^n$ la sphere unité.
   Montrer que $\mathbb{D}^n/\partial\mathbb{D}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.
2. Le cône de X et sa suspension sont définis respectivement par les espaces quotients suivant ;
$$CX \coloneqq (X \times [0,1])/(X \times \{0\}) \quad \text{et} \quad \Sigma X \coloneqq CX/\pi(X \times \{1\}) \ ,$$
   où $\pi : X \times [0,1] \to CX$ est la projection. Montrer qu'il existe des homéomorphismes
$$C\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{D}^n \quad \text{et} \quad \Sigma\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n \ .$$
3. On définit le tore comme l'espace topologique $\mathbb{T}$ quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x,0) \sim (x,1)$ et $(0,y) \sim (1,y)$ pour tous $x, y \in [0,1]$. Montrer que $\mathbb{T}$ est homéomorphe aux espaces suivants :
   (a) le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$,
   (b) le quotient de $\mathbb{R}^2$ sous l'action du groupe discret $\mathbb{Z}^2$ agissant par translations (de vecteurs non tous colinéaires),
   (c) le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ qui sont image d'un point du cercle du plan $\{y = 0\}$ de centre $(2,0,0)$ et de rayon 1 par une rotation d'axe (Oz)).

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à coline.emprin@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T12.

Exercice 4. Bouquets d'espaces ⋆ ⋆

Pour $(X_i, x_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés, on note $\vee_{i\in I} X_i$ l'espace, appelé bouquet des X_i, obtenu à partir de l'union disjointe des X_i en identifiant tous les points x_i.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut voir $\mathbb{S}^{n-1}$ comme sous-espace de $\mathbb{S}^n$ (son « équateur ») par l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0)$. Montrer que $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ est un bouquet de deux sphères de dimension n.
2. La boucle d'oreille hawaïenne est le sous-ensemble $H \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des cercles de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$, pour les entiers $n \geq 1$. Soit $(\mathbb{S}^1_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de copies de $\mathbb{S}^1$ (avec un point distingué). Montrer que $\vee_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{S}^1_i$ n'est pas homéomorphe à H.