TD1 : Rappels de topologie

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆⋆⋆	*facultatifs*

Exercice 1. Propriétés et opérations topologiques ⋆

Soient E un espace topologique et P une des propriétés topologiques mentionnées dans les lignes du tableau suivant.

	adhérence	intérieur	sous-ensemble ouvert	sous-ensemble fermé	union	intersection
séparé						
quasi-compact						
compact						
localement compact						
connexe						
localement connexe						
connexe par arcs						
dense						
séparable						

1. Pour tout sous-espace topologique $F \subset E$ vérifiant P, préciser (en remplissant le tableau) si la propriété P est préservée par passage à l'adhérence (dans E), l'intérieur, un sous-espace ouvert, un sous-espace fermé de F.
2. Pour une famille $(F_i)_{i\in I}$ de sous-espaces topologiques de E vérifiant tous la propriété P, remplir les deux dernières colonnes du tableau en disant si l'union $\bigcup_{i\in I} F_i$ et l'intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ vérifient P. Dans le cas contraire, préciser si P se transmet toutefois par union finie, ou même dénombrable.
3. La ligne « compact » est-elle modifiée si on suppose l'espace ambiant E séparé ?

Exercice 2. Bijections continues ⋆

Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une bijection continue.

1. Est ce que f est nécessairement un homéomorphisme ?
2. Montrer que si X est quasi-compact et Y est séparé alors f est un homéomorphisme.

Exercice 3. Écrasements et quotients ⋆

Soient X un espace topologique et $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X. On note $X/\mathcal{R}$ l'espace quotient. Par exemple, si $A \subset X$ un sous-ensemble, on notera X/A le quotient de X par la relation

$$x\mathcal{R}y \quad \text{si et seulement si} \quad x, y \in A \quad \text{ou} \quad x = y.$$

1. Rappeler la définition de la topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$.
2. Soit $\Gamma_{\mathcal{R}} \coloneqq \{(x, y) \in X \times X \mid x\mathcal{R}y\}$ le graphe de la relation $\mathcal{R}$. Montrer que
   (a) si $X/\mathcal{R}$ est séparé, alors $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est fermé dans $X \times X$;
   (b) si $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est fermé dans $X \times X$ et la projection $X \twoheadrightarrow X/\mathcal{R}$ est ouverte alors $X/\mathcal{R}$ est séparé.
3. On suppose que X est séparé et que A est compact. Montrer que X/A est séparé.
4. Trouver un espace topologique séparé X et un sous-espace A de X tel que X/A soit non séparé.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathbb{D}^n$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}^{n-1} \coloneqq \partial\mathbb{D}^n$ la sphere unité. Montrer que $\mathbb{D}^n/\partial\mathbb{D}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.
6. Le cône de X et sa suspension sont définis respectivement par les espaces quotients suivant ;

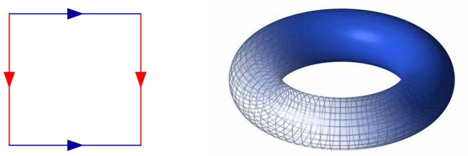
$$CX \coloneqq (X \times [0, 1])/(X \times \{0\}) \quad \text{et} \quad \Sigma X \coloneqq (X \times [0, 1])/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\}) .$$

   Montrer qu'il existe des homéomorphismes $C\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{D}^n$ et $\Sigma\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$.

Exercice 4. Tores ⋆ ⋆

On définit le tore comme l'espace topologique $\mathbb{T}$ quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, y)$ pour tous $x, y \in [0, 1]$. Montrer que $\mathbb{T}$ est homéomorphe aux espaces suivants :

(a) le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$,
(b) le quotient de $\mathbb{R}^2$ sous l'action du groupe discret $\mathbb{Z}^2$ agissant par translations (de vecteurs non tous colinéaires),
(c) le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ qui sont image d'un point du cercle du plan $\{y = 0\}$ de centre $(2, 0, 0)$ et de rayon 1 par une rotation d'axe (Oz)).



Exercice 5. Compactification d'Alexandrov ⋆ ⋆

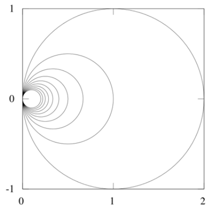
Soit X un espace topologique localement compact et $\{\infty\}$ un singleton. On munit $\widetilde{X} = X \sqcup \{\infty\}$ de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de X et les complémentaires dans $\widetilde{X}$ des compacts de X.

1. Vérifier que $\widetilde{X}$ est bien un espace topologique.
2. Montrer que $\widetilde{X}$ est un espace compact. Montrer que le sous-ensemble $\widetilde{X} \setminus \{\infty\}$, muni de la topologie induite, est homéomorphe à l'espace X de départ.
3. Montrer que la topologie définie sur $\widetilde{X}$ est l'unique topologie telle que :
   (a) $\widetilde{X}$ soit compact,
   (b) l'application identité $X \to \widetilde{X} \setminus \{\infty\}$ soit un homéomorphisme.
4. Montrer que $\widetilde{\mathbb{R}^n}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$, la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 6. Bouquets d'espaces ⋆⋆

Pour $(X_i, x_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés, on note $\vee_{i\in I} X_i$ l'espace, appelé bouquet des X_i, obtenu à partir de l'union disjointe des X_i en identifiant tous les points x_i.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut voir $\mathbb{S}^{n-1}$ comme sous-espace de $\mathbb{S}^n$ (son « équateur ») par l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0)$. Montrer que $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ est un bouquet de deux sphères de dimension n.
2. La boucle d'oreille hawaïenne est le sous-ensemble $H \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des cercles de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$, pour les entiers $n \geq 1$. Soit $(\mathbb{S}^1_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de copies de $\mathbb{S}^1$ (avec un point distingué). Montrer que $\vee_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{S}^1_i$ n'est pas homéomorphe à H.



Exercice 7. Complexes simpliciaux ⋆⋆⋆

Soient $n \geq 1$ et $p \geq 0$ des entiers. On dit que les points $x_0, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^n$ sont *affinement indépendants* si $x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0$ sont linéairement indépendants. Un *p-simplexe* de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de $p+1$ points $x_0, \ldots, x_p$ affinement indépendants de $\mathbb{R}^n$, appelés *sommets* du simplexe. On appelle *face* du p-simplexe l'enveloppe convexe de n'importe quel sous-ensemble non vide de l'ensemble des sommets du simplexe.

On appelle *complexe simplicial* (respectivement, complexe simplicial fini) dans $\mathbb{R}^n$ un ensemble (respectivement, ensemble fini) K de simplexes de $\mathbb{R}^n$ tel que

— toute face d'un élément de K soit encore dans K ;

— l'intersection de deux éléments quelconques $\sigma, \sigma' \in K$ soit ou bien vide, ou bien une face commune à σ et σ'.

— (locale finitude) chaque point de $\mathbb{R}^n$ a un voisinage n'intersectant qu'un nombre fini de simplexes de K.

On note $|K|$ la réunion de tous les simplexes d'un complexe simplicial K.

1. Dessiner un 0-simplexe, un 1-simplexe, un 2-simplexe, un 3-simplexe.
2. Montrer que l'ensemble des faces d'un simplexe de $\mathbb{R}^n$ est un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^n$.
3. Soit K un complexe simplicial fini dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble des intérieurs relatifs des simplexes de K fournit une décomposition cellulaire de $|K|$.