TD1 : CW-complexes

Applications du cours ⋆ — *à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆⋆ — *à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆⋆⋆ — *facultatifs*

Partie 1 : Rappels de topologie

Les exercices de cette première partie constituent des rappels du cours "Topologie et calcul différentiel". Ils ne seront pas traités en TD mais il est conseillé de les chercher.

Exercice 1. Propriétés et opérations topologiques

Soient E un espace topologique et P une des propriétés topologiques mentionnées dans les lignes du tableau suivant.

	adhérence	intérieur	sous-ensemble ouvert	sous-ensemble fermé	union	intersection
séparé						
quasi-compact						
compact						
localement compact						
connexe						
localement connexe						
connexe par arcs						
dense						
séparable						

1. Pour tout sous-espace topologique $F \subset E$ vérifiant P, préciser (en remplissant le tableau) si la propriété P est préservée par passage à l'adhérence (dans E), l'intérieur, un sous-espace ouvert, un sous-espace fermé de F.
2. Pour une famille $(F_i)_{i\in I}$ de sous-espaces topologiques de E vérifiant tous la propriété P, remplir les deux dernières colonnes du tableau en disant si l'union $\bigcup_{i\in I} F_i$ et l'intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ vérifient P. Dans le cas contraire, préciser si P se transmet toutefois par union finie, ou même dénombrable.
3. La ligne « compact » est-elle modifiée si on suppose l'espace ambiant E séparé ?

Exercice 2. Bijections continues

Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une bijection continue.

1. Est ce que f est nécessairement un homéomorphisme ?
2. Montrer que si X est quasi-compact et Y est séparé alors f est un homéomorphisme.

Exercice 3. Compactification d'Alexandrov

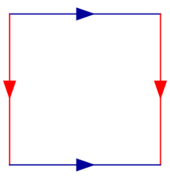
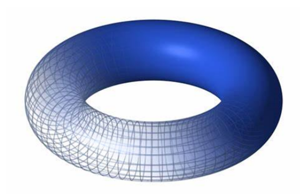
Soit X un espace topologique localement compact et $\{\infty\}$ un singleton. On munit $\widetilde{X} = X \sqcup \{\infty\}$ de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de X et les complémentaires dans $\widetilde{X}$ des compacts de X.

1. Vérifier que $\widetilde{X}$ est bien un espace topologique.
2. Montrer que $\widetilde{X}$ est un espace compact. Montrer que le sous-ensemble $\widetilde{X} \setminus \{\infty\}$, muni de la topologie induite, est homéomorphe à l'espace X de départ.
3. Montrer que la topologie définie sur $\widetilde{X}$ est l'unique topologie telle que :
   (a) $\widetilde{X}$ soit compact,
   (b) l'application identité $X \to \widetilde{X} \setminus \{\infty\}$ soit un homéomorphisme.
4. Montrer que $\widetilde{\mathbb{R}^n}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$, la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Partie 2 : Exemples fondamentaux d'espaces topologiques

Exercice 4. Tore ⋆

On définit le tore comme l'espace topologique $\mathbb{T}$ quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x,0) \sim (x,1)$ et $(0,y) \sim (1,y)$ pour tous $x, y \in [0,1]$.

Montrer que $\mathbb{T}$ est homéomorphe aux espaces suivants :

(a) le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$,

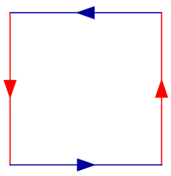
(b) le quotient de $\mathbb{R}^2$ sous l'action du groupe discret $\mathbb{Z}^2$ agissant par translations (de vecteurs non tous colinéaires),

(c) le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ qui sont image d'un point du cercle du plan $\{y = 0\}$ de centre $(2,0,0)$ et de rayon 1 par une rotation d'axe (Oz)).

Exercice 5. Espaces projectifs ⋆

Soit K un corps (on supposera ici que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'espace $K\mathbb{P}^n$ est défini comme le quotient de $K^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action du groupe multiplicatif K^* agissant par homothéties. Pour tout $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[x_0 : \ldots : x_n]$ son image dans $K\mathbb{P}^n$. On définit $K\mathbb{P}^\infty$ comme l'union $\bigcup_{n \geq 0} K\mathbb{P}^n$.

1. (a) Le sous-groupe $\{\pm 1\}$ de $\mathbb{R}^*$ agit sur $\mathbb{S}^n$ par multiplication. Montrer que le quotient $\mathbb{S}^n / \{\pm 1\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.
   (b) Le sous-groupe $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes de module 1 agit sur $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par multiplication. Montrer que le quotient $\mathbb{S}^{2n+1} / \mathbb{S}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.
2. Montrer que $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ et que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.
3. Montrer que $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ est homéomorphe à l'espace topologique quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x,0) \sim (1-x,1)$ et $(0,y) \sim (1,1-y)$ pour tous $x, y \in [0,1]$.



4. (a) Pour $n \geq 1$, montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} K^n & \to & K\mathbb{P}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & [1 : x_1 : \ldots : x_n] \end{array}$$

définit un homéomorphisme entre K^n et un ouvert U_0 de $K\mathbb{P}^n$ que l'on explicitera.

(b) En déduire que $K\mathbb{P}^n$ admet un recouvrement par $n+1$ ouverts homéomorphes à K^n et que le complémentaire de chacun de ces ouverts est homéomorphe à $K\mathbb{P}^{n-1}$.

Exercice 6. Écrasements et quotients ⋆⋆

Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-ensemble. On note X/A l'espace quotient de X par la relation

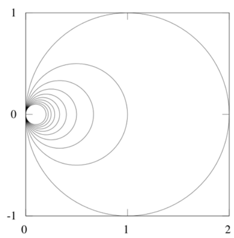
$$x \sim y \quad \text{si et seulement si} \quad x, y \in A \quad \text{ou} \quad x = y.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\bar{D}^n$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\bar{D}^n / \partial \bar{D}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.
2. On suppose que X est séparé et que A est compact. Montrer que X/A est séparé.
3. Trouver un espace topologique séparé X et un sous-espace A de X tel que X/A soit non séparé.
4. Soit $n \geq 2$. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agit par conjugaison sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, l'espace des matrices de taille n . Montrer que le quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \backslash \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas séparé.

Exercice 7. Bouquets d'espaces ⋆⋆

Pour $(X_i, x_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés, on note $\vee_{i \in I} X_i$ l'espace, appelé bouquet des X_i, obtenu à partir de l'union disjointe des X_i en identifiant tous les points x_i.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut voir $\mathbb{S}^{n-1}$ comme sous-espace de $\mathbb{S}^n$ (son « équateur ») par l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0)$. Montrer que $\mathbb{S}^n / \mathbb{S}^{n-1}$ est un bouquet de deux sphères de dimension n.
2. La boucle d'oreille hawaïenne est le sous-ensemble $H \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des cercles de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$, pour les entiers $n \geq 1$. Soit $(\mathbb{S}^1_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de copies de $\mathbb{S}^1$ (avec un point distingué). Montrer que $\vee_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{S}^1_i$ n'est pas homéomorphe à H.



Partie 3 : CW-complexes

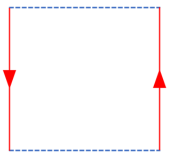
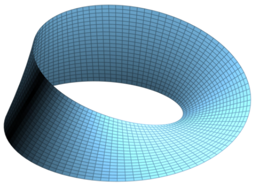
Exercice 8. Exemples de CW-complexes ⋆

1. Soit $n \geq 0$. Est-ce que $\mathbb{R}^n$ admet une structure de CW-complexe ? De CW-complexe fini ?
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\mathbb{S}^n$ admet une décomposition cellulaire avec deux cellules. Munir $\mathbb{S}^n$ également d'une structure de CW-complexe dont le k-squelette soit homéomorphe à $\mathbb{S}^k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.
3. Donner une décomposition cellulaire des espaces suivants :

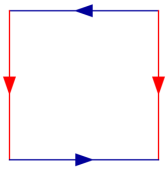
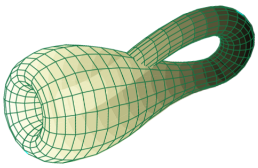
   (a) Les espaces projectifs $\mathbb{RP}^n$ et $\mathbb{CP}^n$ pour $n \geq 0$, ainsi que $\mathbb{RP}^\infty$ et $\mathbb{CP}^\infty$

   (b) Le tore $\mathbb{T}$

(c) Le ruban de möbius $\mathbb{M}$ défini comme l'espace topologique quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (1-x, 1)$, pour tous $x \in [0,1]$.

(d) La bouteille de Klein $\mathbb{B}$ définie comme l'espace topologique quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, 1-y)$ pour tous $x, y \in [0,1]$.

Exercice 9. Sphère de dimension infinie ⋆⋆

La sphère de dimension infinie $\mathbb{S}^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$ est définie comme l'union $\mathbb{S}^\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{S}^n$.

1. Munir $\mathbb{S}^\infty$ d'une structure de CW-complexe de sorte que chaque sphère $\mathbb{S}^k \subset \mathbb{S}^\infty$ soit un sous-complexe.
2. Soit $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ un CW-complexe qui s'écrit comme l'union d'une suite croissante de CW-complexes
$$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$$
telle que chaque inclusion $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ est homotope à une application constante. Montrer que X est contractile.
3. En déduire que $\mathbb{S}^\infty$ est contractile.

Exercice 10. Propriétés des CW-complexes ⋆⋆

1. Soit X un CW-complexe, et soit C une cellule de dimension n de X. Considérons une application caractéristique $f : \bar{D}^n \to X$ de C. Montrer que l'adhérence de C dans X coïncide avec $f(\bar{D}^n)$.
2. Soit X un CW-complexe, et soit $k \geq 0$ un entier. Montrer que le k-squelette X_k de X est un sous-complexe de X.
3. Soit X un CW-complexe. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, l'espace quotient X_k / X_{k-1} est soit un point, soit homéomorphe à un bouquet de sphères de dimension k.
4. Montrer qu'un CW-complexe est
   (a) normal, et en particulier séparé.
   (b) compact si et seulement s'il est fini.
   (c) connexe par arcs si et seulement si son 1-squelette l'est

Exercice 11. Produits de CW-complexes ⋆⋆⋆

Soient X et Y deux CW-complexes.

1. Est-ce que le produit cartésien $X \times Y$ muni de la topologie produit est toujours un CW-complexe ?
2. Que se passe t-il si X et Y sont localement compacts ? Si X ou Y est localement fini ?

Exercice 12. Complexes simpliciaux $\star\star\star$

Soient $n \geq 1$ et $p \geq 0$ des entiers. On dit que les points $x_0, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^n$ sont *affinement indépendants* si $x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0$ sont linéairement indépendants. Un *p-simplexe* de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de $p+1$ points $x_0, \ldots, x_p$ affinement indépendants de $\mathbb{R}^n$, appelés *sommets* du simplexe. On appelle *face* du p-simplexe l'enveloppe convexe de n'importe quel sous-ensemble non vide de l'ensemble des sommets du simplexe.

On appelle *complexe simplicial* (respectivement, complexe simplicial fini) dans $\mathbb{R}^n$ un ensemble (respectivement, ensemble fini) K de simplexes de $\mathbb{R}^n$ tel que

- toute face d'un élément de K soit encore dans K ;
- l'intersection de deux éléments quelconques $\sigma, \sigma' \in K$ soit ou bien vide, ou bien une face commune à σ et σ'.
- (locale finitude) chaque point de $\mathbb{R}^n$ a un voisinage n'intersectant qu'un nombre fini de simplexes de K.

On note $|K|$ la réunion de tous les simplexes d'un complexe simplicial K.

1. Dessiner un 0-simplexe, un 1-simplexe, un 2-simplexe, un 3-simplexe.
2. Montrer que l'ensemble des faces d'un simplexe de $\mathbb{R}^n$ est un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^n$.
3. Soit K un complexe simplicial fini dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble des intérieurs relatifs des simplexes de K fournit une décomposition cellulaire de $|K|$.