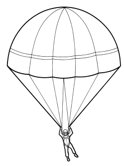
TD10 : Homologie singulière II

Applications du cours ⋆ *à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆ ⋆ *à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆ ⋆ ⋆ *facultatifs*

Exercice 1. Calculs d'homologie ⋆

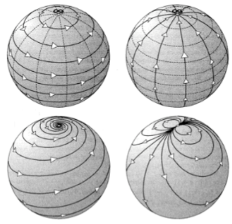
1. Bouquet d'espaces. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques correctement pointés. Calculer $H_n(X \vee Y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction des groupes d'homologie de X et de Y.
2. Suspension. Soit X un espace topologique. On rappelle que son cone CX est l'espace quotient $X \times I/X \times \{1\}$, et la suspension SX de X est l'espace quotient $CX/(X \times \{0\})$. Calculer l'homologie de SX en fonction de l'homologie de X.
3. Tore et bouquets de sphères Montrer que le tore $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ a les mêmes groupes d'homologie singulière que le bouquet $B = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ mais que ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.
4. La bouteille de Klein Calculer les groupes d'homologie de la bouteille de Klein.
5. L'espace privé d'un cercle Calculer l'homologie du complémentaire d'un cercle dans $\mathbb{R}^3$.
6. Parachute. Calculer l'homologie du « parachute » obtenu en recollant les trois sommets de Δ^2.



Exercice 2. Degré d'une application ⋆

Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application continue. On définit le degré de f est comme le nombre entier $\deg(f)$ tel que, pour tout $z \in H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z})$, on ait $f_*(z) = \deg(f)z$.

1. Montrer que cette définition du degré coïncide avec celle de l'exercice 2 du TD3 et que les résultats suivants sont encore vrais :
   (a) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
   (b) Deux applications sont homotopes alors elles ont le même degré.
   (c) Si $\deg(f) \neq 0$ alors f est surjective. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application continue sans point fixe. Montrer que $\deg f = (-1)^{n+1}$.
   Indice. On pourra montrer que toute application continue, sans point fixe est homotope à l'application antipodie.
3. Montrer que pour toute application continue, $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$, sans point fixe, il existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x_0) = -x_0$. En déduire qu'il n'existe pas d'application continue, $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$, telle que x est orthogonal à $f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{S}^{2n}$.
4. Soit G un groupe non-trivial agissant librement sur $\mathbb{S}^{2n}$ par homéomorphismes. Montrer que $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. Champs de vecteurs.
   (a) On suppose n impair. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{S}^n$ un champ de vecteurs tangents continu ne s'annulant pas.
   (b) Montrer le théorème de la « boule chevelue » : tout champ de vecteurs tangents continu sur $\mathbb{S}^n$ avec n pair s'annule en au moins un point.



Remarque. On note $\rho(n)$ le nombre maximum de champs de vecteurs tangents à la sphère $\mathbb{S}^n$ linéairement indépendants en chaque point. D'après un théorème de Hurewitz, Radon, Eckman et Adams, ce nombre peut être déterminé de façon explicite : si l'on décompose l'entier n en $n = (2a+1)2^b$ avec $b = c + 4d$ et $0 \leq c \leq 3$, on montre que $\rho(n) + 1 = 2^c + 8d$.

Exercice 3. Le théorème de Brouwer et ses applications ⋆⋆

Théorème de Brouwer : Soit $n \geq 0$. Toute application continue $D^n \to D^n$ de la boule de dimension n dans elle-même, avec $n \geq 0$, a un point fixe.

1. Montrer le théorème de Brouwer.

   Indice : Dans le cas $n \geq 1$, on pourra raisonner par l'absurde en considérant une application $f : D^n \to D^n$ qui n'a pas de point fixe et en déduire une rétraction de D^n sur son bord $\mathbb{S}^{n-1}$.
2. Soit $f : D^n \to D^n$ une application continue. Montrer qu'il existe un point $x \in D^n$ tel que $f(x) = 2x$.
3. Montrer que toute application continue, homotopiquement triviale, $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, admet un point fixe.
4. Soient $f_1, \ldots, f_n : [0,1]^n \to \mathbb{R}$, des fonctions continues telles que $f_i(x) \geq 0$, en tous les points x dont la i-ième coordonnée vaut 0, et $f_i(y) \leq 0$, en tous les points y dont la i-ème coordonnée vaut 1. Alors, il existe un point $(a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$ en lequel toutes les fonctions f_i s'annulent.
5. Une matrice réelle $A = (a_{ij})$ est dite *non-négative* si $a_{ij} \geq 0$, pour tout couple (i,j).

   Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$, non négative et inversible, a une valeur propre réelle $\lambda > 0$, admettant un vecteur propre $(a_1, \ldots, a_n)$, avec $a_i \geq 0$ pour tout i.

Exercice 4. Produit de sphères ⋆⋆

Soient n et m deux entiers naturels. Calculer les groupes d'homologie du produit $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$.

Exercice 5. Homologie singulière de la surface de genre g ⋆⋆⋆

1. Soit X_g une sphère dont on a retiré $2g$ ouverts disjoints D_i^2 homéomorphes au disque D^2, $1 \leq i \leq 2g$. Calculer l'homologie de X_g, ainsi que l'application induite en homologie par

$$\bigsqcup_{i=1}^{2g} \partial D_i^2 \hookrightarrow X_g \ .$$

2. En utilisant la question précédente, calculer les groupes d'homologie de S_g, pour $g \geq 1$.

   Remarque. Nous verrons dans le TD suivant sur l'homologie cellulaire, une autre manière de calculer l'homologie de n'importe quelle surface.
3. Soient $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ deux ensembles de points distincts de S_g.
   (a) Calculer l'homologie de $S_g \setminus X$, le complémentaire de X.
   (b) Calculer l'homologie du quotient S_g/Y.
   (c) Calculer l'homologie de $(S_g \setminus X)/Y$.

Exercice 6. Homologie de quelques espaces « pathologiques » ⋆⋆⋆

1. Calculer l'homologie de la droite à deux origines, et plus généralement de la droite à n origines.
2. Calculer l'homologie de l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction $\sin(1/x)$, $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.