

TD11 : Homologie singulière II

Applications du cours ★ à préparer en l'avance et corriger en début de séance
 Pour s'entraîner et approfondir ★★ à traiter pendant la séance
 Pour aller plus loin ★★★ facultatifs

Exercice 1. Calculs d'homologie ★

1. **Bouquet d'espaces.** Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques correctement pointés. Calculer $H_n(X \vee Y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction des groupes d'homologie de X et de Y .
2. **Suspension.** Soit X un espace topologique. On rappelle que son cône CX est l'espace quotient $X \times I / X \times \{1\}$, et la suspension SX de X est l'espace quotient $CX / (X \times \{0\})$. Calculer l'homologie de SX en fonction de l'homologie de X .
3. **Tore et bouquets de sphères** Montrer que le tore $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ a les mêmes groupes d'homologie singulière que le bouquet $B = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ mais que ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.
4. **La bouteille de Klein** Calculer les groupes d'homologie de la bouteille de Klein.
5. **L'espace privé d'un cercle** Calculer l'homologie du complémentaire d'un cercle dans \mathbb{R}^3 .
6. **Parachute.** Calculer l'homologie du « parachute » obtenu en recollant les trois sommets de Δ^2 .

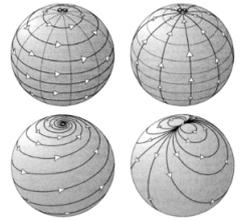


Exercice 2. Degré d'une application ★

Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ une application continue. On définit le degré de f est comme le nombre entier $\deg(f)$ tel que, pour tout $z \in H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z})$, on ait $f_*(z) = \deg(f)z$.

1. Montrer que cette définition du degré coïncide avec celle de l'exercice 2 du TD3 et que les résultats suivants sont encore vrais :
 - (a) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
 - (b) Deux applications sont homotopes alors elles ont le même degré.
 - (c) Si $\deg(f) \neq 0$ alors f est surjective. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ une application continue sans point fixe. Montrer que $\deg f = (-1)^{n+1}$.
Indice. On pourra montrer que toute application continue, sans point fixe est homotope à l'application antipodie.
3. Montrer que pour toute application continue, $f : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$, sans point fixe, il existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x_0) = -x_0$. En déduire qu'il n'existe pas d'application continue, $f : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$, telle que x est orthogonal à $f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{S}^{2n}$.
4. Soit G un groupe non-trivial agissant librement sur \mathbb{S}^{2n} par homéomorphismes. Montrer que $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. **Champs de vecteurs.**
 - (a) On suppose n impair. Montrer qu'il existe sur \mathbb{S}^n un champ de vecteurs tangents continu ne s'annulant pas.
 - (b) Montrer le théorème de la « boule chevelue » : tout champ de vecteurs tangents continu sur \mathbb{S}^n avec n pair s'annule en au moins un point.

Remarque. On note $\rho(n)$ le nombre maximum de champs de vecteurs tangents à la sphère \mathbb{S}^n linéairement indépendants en chaque point. D'après un théorème de Hurewicz, Radon, Eckman et Adams, ce nombre peut être déterminé de façon explicite : si l'on décompose l'entier n en $n = (2a + 1)2^b$ avec $b = c + 4d$ et $0 \leq c \leq 3$, on montre que $\rho(n) + 1 = 2^c + 8d$.



Exercice 3. Le théorème de Brouwer et ses applications ★★

Théorème de Brouwer : Soit $n \geq 0$. Toute application continue $D^n \rightarrow D^n$ de la boule de dimension n dans elle-même, avec $n \geq 0$, a un point fixe.

1. Montrer le théorème de Brouwer.

Indice : Dans le cas $n \geq 1$, on pourra raisonner par l'absurde en considérant une application $f : D^n \rightarrow D^n$ qui n'a pas de point fixe et en déduire une rétraction de D^n sur son bord \mathbb{S}^{n-1} .

2. Soit $f : D^n \rightarrow D^n$ une application continue. Montrer qu'il existe un point $x \in D^n$ tel que $f(x) = 2x$.
3. Montrer que toute application continue, homotopiquement triviale, $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, admet un point fixe.
4. Soient $f_1, \dots, f_n : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions continues telles que $f_i(x) \geq 0$, en tous les points x dont la i -ième coordonnée vaut 0, et $f_i(y) \leq 0$, en tous les points y dont la i -ième coordonnée vaut 1. Alors, il existe un point $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ en lequel toutes les fonctions f_i s'annulent.
5. Une matrice réelle $A = (a_{ij})$ est dite *non-négative* si $a_{ij} \geq 0$, pour tout couple (i, j) .
Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$, non négative et inversible, a une valeur propre réelle $\lambda > 0$, admettant un vecteur propre (a_1, \dots, a_n) , avec $a_i \geq 0$ pour tout i .

Exercice 4. Produit de sphères ★★

Soient n et m deux entiers naturels. Calculer les groupes d'homologie du produit $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$.

Exercice 5. Homologie singulière de la surface de genre g ★★★

1. Soit X_g une sphère dont on a retiré $2g$ ouverts disjoints D_i^2 homéomorphes au disque D^2 , $1 \leq i \leq 2g$. Calculer l'homologie de X_g , ainsi que l'application induite en homologie par

$$\bigsqcup_{i=1}^{2g} \partial D_i^2 \hookrightarrow X_g .$$

2. En utilisant la question précédente, calculer les groupes d'homologie de S_g , pour $g \geq 1$.

Remarque. Nous verrons dans le TD suivant sur l'homologie cellulaire, une autre manière de calculer l'homologie de n'importe quelle surface.

3. Soient $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ deux ensembles de points distincts de S_g .
 - (a) Calculer l'homologie de $S_g \setminus X$, le complémentaire de X .
 - (b) Calculer l'homologie du quotient S_g/Y .
 - (c) Calculer l'homologie de $(S_g \setminus X)/Y$.

Exercice 6. Homologie de quelques espaces « pathologiques » ★★★

1. Calculer l'homologie de la droite à deux origines, et plus généralement de la droite à n origines.
2. Calculer l'homologie de l'adhérence dans \mathbb{R}^2 du graphe de la fonction $\sin(1/x)$, $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

