TD11 : Homologie cellulaire

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆⋆⋆	*facultatifs*

Exercice 1. La différentielle des chaînes cellulaires ⋆

Soit X un CW-complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$C_n^{cw}(X;R) \coloneqq H_n(X_n, X_{n-1};R) \ .$$

Rappelons que si l'on note $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$ l'ensemble des cellules de dimension n de X, alors $C_n^{cw}(X;R) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda_n} Re_\alpha$. Pour $n \geq 1$, on note $\partial_n : C_n^{cw}(X;R) \to C_{n-1}^{cw}(X;R)$ la composée

$$H_n(X_n, X_{n-1};R) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(X_{n-1};R) \xrightarrow{(i_{n-1})_*} H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2};R)$$

où δ est le morphisme de bord de la suite exacte longue de la paire (X_n, X_{n-1}) et i_n est l'inclusion $X_{n-1} \to (X_{n-1}, X_{n-2})$. Par convention, $\partial_0 = 0$. On obtient un complexe $(C_\bullet^{cw}(X;R), \partial_\bullet)$.

Pour tout $n \geq 0$ et toute cellule $e_\alpha \in \Lambda_n$, on note

- $\phi_\alpha : \mathbb{D}^n \to X_n$ l'application caractéristique et $f_\alpha : \mathbb{S}^{n-1} \to X_{n-1}$ l'application d'attachement de e_α,
- $\pi_n : X_n \to X_n/X_{n-1}$ la projection canonique,
- $g_\alpha : \mathbb{S}^n = \mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \to S_\alpha$ l'homéomorphisme induit par ϕ_α où $S_\alpha \coloneqq \overline{e_\alpha}/\partial e_\alpha$,
- $p_\alpha : \vee_{\beta\in\Lambda_n} S_\beta \to S_\alpha$ l'application qui écrase sur le point base les sphères différentes de S_α,
- $\psi_n : \vee_{\beta\in\Lambda_n} S_\beta \to X_n/X_{n-1}$ l'isomorphisme.

Si $n \geq 2$, pour tout α dans Λ_n et tout α' dans Λ_{n-1} on considère la composition suivante

$$\mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{f_\alpha} X_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} X_{n-1}/X_{n-2} \xrightarrow{\psi_{n-1}^{-1}} \bigvee_{\beta\in\Lambda_{n-1}} S_\beta \xrightarrow{p_{\alpha'}} S_{\alpha'} \xrightarrow{g_{\alpha'}^{-1}} \mathbb{S}^{n-1}$$

et on note $d_{\alpha,\alpha'}$ son degré. Si $n = 1$ pour toute arrête e_α de X et tout point $e_{\alpha'}$, par définition $d_{\alpha,\alpha'}$ vaut 1 si $e_{\alpha'}$ est l'extrémité de e_α, -1 si $e_{\alpha'}$ est l'origine et 0 sinon.

On veut montrer que le bord $\partial_n : C_n^{cw}(X;R) \to C_{n-1}^{cw}(X;R)$ est le morphisme défini par

$$\bigoplus_{\alpha\in\Lambda_n} Re_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\beta\in\Lambda_{n-1}} Re_\beta, \quad e_\alpha \mapsto \sum_{\beta\in\Lambda_{n-1}} d_{\alpha,\alpha'} e_{\alpha'} \ .$$

1. Montrer le résultat pour $n = 0$ et $n = 1$.
2. Si $n \geq 2$, expliquez en quoi l'on est ramenés à montrer que pour tout α dans Λ_n et tout α' dans Λ_{n-1}, l'image de e_α par l'application
$$H_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \overset{E}{\cong} H_{n-1}(X_{n-1}/X_{n-2}) \xrightarrow{(\Phi)_*} H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$
est $d_{\alpha,\alpha'}$ où l'on note $\Phi \coloneqq g_{\alpha'}^{-1} \circ p_{\alpha'} \circ \psi_{n-1}^{-1}$ et E l'isomorphisme qui vient du théorème d'écrasement.
3. Montrer que l'on a $E \circ (i_{n-1})_* = (\pi_{n-1})_*$
4. Pour tout α dans Λ_n montrer que l'on a un diagramme commutatif où la flèche horizontale du bas est un isomorphisme
$$\begin{tikzcd} H_n(X_n, X_{n-1};R) \arrow[r, "\delta"] & H_{n-1}(X_{n-1};R) \\ H_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1};R) \arrow[u, "(\phi_\alpha)_*"] \arrow[r, "\delta"] & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1};R) \arrow[u, "(f_\alpha)_*"'] \end{tikzcd}$$
5. Conclure

Remarque. Si $R \coloneqq \mathbb{Z}$ on peut voir l'entier $d_{\alpha,\alpha'}$ comme le nombre de fois que le bord de la cellule e_α de dimension n s'enroule autour de la cellule $e_{\alpha'}$ de dimension $n-1$ par l'application d'attachement.

Exercice 2. Homologie cellulaire de quelques espaces $\star$

Soient R un groupe abélien et $n \geq 0$. Calculer l'homologie à coefficients dans R des espaces suivants :

1. La sphère $\mathbb{S}^n$,
2. Les espaces projectifs complexes $\mathbb{CP}^n$ et $\mathbb{CP}^\infty$,
3. L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ et $\mathbb{RP}^\infty$,
4. La surface S_g de genre $g \geq 1$. En déduire l'homologie du tore $\mathbb{T}$.
5. Trouver deux espaces qui ont même homologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$ mais pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$,
6. Trouver deux espaces qui ont même homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Homologie cellulaire et produit $\star\star$

Soient X et Y deux CW-complexes. On suppose que X ou Y est localement fini (par exemple que l'un des deux est compact).

1. Construire une structure de CW-complexe sur le produit $X \times Y$.
2. Montrer que l'on a un isomorphisme naturel au niveau des complexes de chaînes cellulaires
$$C_\bullet^{cw}(X \times Y) \cong C_\bullet^{cw}(X) \otimes C_\bullet^{cw}(Y)$$
3. Calculer l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ pour $m, n \geq 1$.

Exercice 4. Caractéristique d'Euler $\star\star$

Soit X un CW-complexe fini. Pour tout $k \geq 0$, on note c_k le nombre de k-cellules de X. La *caractéristique d'Euler* de X est l'entier $\chi(X) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i c_i$.

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que $\chi(X)$ peut également être calculée par la formule
$$\chi(X) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_F H_i(X; \mathbb{K}).$$
2. Calculer la caractéristique d'Euler des surfaces S_g et S'_g pour tout $g \geq 0$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les entiers g et h pour qu'il existe un revêtement de S_g par S_h.
4. On suppose que le CW-complexe fini X s'écrit comme l'union de deux sous-complexes A et B. Montrer que
$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$
5. Soient X et Y des CW-complexes finis. Expliquer comment $X \times Y$ peut être muni d'une structure de CW-complexe fini, et montrer que $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

Exercice 5. Espaces de Moore $\star\star$

Étant donnés un groupe abélien G et un entier $n \geq 1$, on appelle *espace de Moore* pour (G, n) un CW-complexe X tel que $H_n(X, \mathbb{Z}) \simeq G$ et $\tilde{H}_i(X) = 0$ pour $i \neq n$.

1. Construire un espace de Moore pour $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et n quelconque.
2. Construire un espace de Moore pour G abélien de type fini et n quelconque.
3. Construire un espace de Moore pour G et n quelconques.
4. Soient $(G_i)_{i\geq 1}$ des groupes abéliens. Construire un espace topologique connexe par arcs X tel que $H_i(X, \mathbb{Z}) = G_i$ pour tout $i \geq 1$.

Exercice 6. Points antipodaux ⋆⋆⋆

Calculer l'homologie des espaces suivants :

1. Le quotient de $\mathbb{S}^2$ obtenu en identifiant les points antipodaux de son équateur.
2. Le quotient de $\mathbb{S}^3$ obtenu en identifiant les points antipodaux de son équateur $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$.

Exercice 7. Espaces lenticulaires ⋆⋆⋆

Soit $m > 1$ un entier. On fixe $l_1, \ldots, l_n$ des entiers relativement premiers à m. On rappelle que deux entiers sont relativement premiers s'ils n'ont aucun diviseur commun à l'exception de 1. On définit *l'espace lenticulaire* $L = L_m(l_1, \ldots, l_n)$ comme le quotient de $\mathbb{S}^{2n-1}$ vu comme sphère unité de $\mathbb{C}^n$ par l'action de $\mathbb{Z}_m$ engendré par la rotation

$$\rho(z_1, \ldots, z_n) = \left(e^{2\pi i l_1/m} z_1, \ldots, e^{2\pi i l_n/m} z_n\right) .$$

1. Déterminer L dans le cas $m = 2$.
2. Montrer que la projection $\mathbb{S}^{2n-1} \to L$ est un revêtement.
3. Construire une structure de CW-complexe sur L avec une cellule en chaque dimension k pour $k \leq 2n-1$.
4. Montrer que le complexe de chaînes cellulaires associé à L est donné par

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{m} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \ldots \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{m} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \longleftarrow 0$$

5. En déduire que $H_k^{cw}(L_m(l_1, \ldots, l_n); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2n-1 \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & k \text{ impair}, 0 < p < 2n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$