TD12 : Applications de la topologie algébrique

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆ ⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆ ⋆ ⋆	*facultatifs*

Exercice 1. Champs de vecteurs ⋆

1. Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application continue sans point fixe. Montrer que $\deg f = (-1)^{n+1}$.
   Indice. On pourra montrer que toute application continue, sans point fixe est homotope à l'application antipodie.
2. Montrer que pour toute application continue, $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$, sans point fixe, il existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x_0) = -x_0$. En déduire qu'il n'existe pas d'application continue, $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$, telle que x est orthogonal à $f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{S}^{2n}$.
3. Soit G un groupe non-trivial agissant librement sur $\mathbb{S}^{2n}$ par homéomorphismes. Montrer que $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. (a) On suppose n impair. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{S}^n$ un champ de vecteurs tangents continu ne s'annulant pas.
   (b) Montrer le théorème de la « boule chevelue » : tout champ de vecteurs tangents continu sur $\mathbb{S}^n$ avec n pair s'annule en au moins un point.

Exercice 2. Théorème de Borsuk-Ulam ⋆

Le théorème de Borsuk-Ulam dit que pour tout $n \geq 1$ et pour toute application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$, il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

1. Prouver le théorème pour $n = 1$.
2. On souhaite montrer le théorème pour $n = 2$. On raisonne par l'absurde et on suppose donc qu'il existe une application $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ qui vérifie, pour tout x, $f(x) \neq f(-x)$.
   (a) Montrer que si $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ vérifie $g(-x) = -g(x)$ alors g est de degré impair.
   (b) Soit l'application $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ définie par
   $$g : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$
   Observer que $g(-x) = -g(x)$ et en déduire le théorème pour $n = 2$ en considérant $g \circ \iota : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ où ι est l'inclusion de $\mathbb{S}^1$ comme équateur dans $\mathbb{S}^2$.
3. Montrer le théorème de Lusternik-Schnirelmann : Soient A, B, C trois fermés de $\mathbb{S}^2$ dont la réunion recouvre $\mathbb{S}^2$. Montrez que l'un des fermés contient deux points antipodaux.

Exercice 3. Le théorème de Brouwer et ses applications ⋆ ⋆

Théorème de Brouwer : Soit $n \geq 0$. Toute application continue $D^n \to D^n$ de la boule de dimension n dans elle-même, avec $n \geq 0$, a un point fixe.

1. Montrer le théorème de Brouwer.
   Indice : Dans le cas $n \geq 1$, on pourra raisonner par l'absurde en considérant une application $f : D^n \to D^n$ qui n'a pas de point fixe et en déduire une rétraction de D^n sur son bord $\mathbb{S}^{n-1}$.
2. Soit $f : D^n \to D^n$ une application continue. Montrer qu'il existe un point $x \in D^n$ tel que $f(x) = 2x$.
3. Montrer que toute application continue, homotopiquement triviale, $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, admet un point fixe.
4. Soient $f_1, \ldots, f_n : [0,1]^n \to \mathbb{R}$, des fonctions continues telles que $f_i(x) \geq 0$, en tous les points x dont la i-ième coordonnée vaut 0, et $f_i(y) \leq 0$, en tous les points y dont la i-ème coordonnée vaut 1. Alors, il existe un point $(a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$ en lequel toutes les fonctions f_i s'annulent.
5. Une matrice réelle $A = (a_{ij})$ est dite *non-négative* si $a_{ij} \geq 0$, pour tout couple (i,j).
   Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$, non négative et inversible, a une valeur propre réelle $\lambda > 0$, admettant un vecteur propre $(a_1, \ldots, a_n)$, avec $a_i \geq 0$ pour tout i.

Exercice 4. Une autre démonstration du théorème de Brouwer ⋆⋆⋆

1. Expliquer pourquoi le théorème de Brouwer est équivalent au résultat suivant : soit Δ^n un n-simplexe. Alors toute fonction $f : \Delta^n \to \Delta^n$ admet un point fixe.
2. Une *triangulation* de Δ^2 est la donnée d'un ensemble fini S de points de Δ^2 contenant les sommets de Δ^2, ainsi que d'un ensemble fini T de triangles de sommets appartenant à S, d'intérieurs disjoints, recouvrant Δ et telle que l'intersection de deux tels triangles soit ou bien vide, ou bien un côté de chacun des deux, ou bien un sommet de chacun des deux.

   On considère une triangulation (S, T) d'un 2-simplexe Δ^2 (que l'on voit comme un triangle $A_1A_2A_3$).

   Un *coloriage de Sperner* est une fonction $c : S \to \{1, 2, 3\}$ telle que
   - Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $c(A_i) = i$.
   - Pour tout $v \in S$ appartenant au côté A_iA_j, $c(v) \in \{i, j\}$.

   Montrer que pour tout coloriage de Sperner c il existe nécessairement un triangle $B_1B_2B_3 \in T$ tel que $c(\{B_1, B_2, B_3\}) = \{1, 2, 3\}$.
3. On se propose de donner une autre démonstration du théorème de Brouwer. Soit $f : \Delta^2 \to \Delta^2$ une fonction continue (supposée sans point fixe). Expliquer comment on peut utiliser f pour munir toute triangulation (S, T) de Δ^2 d'un coloriage de Sperner. En prenant des triangulations de diamètres de plus en plus petits, aboutir à une contradiction.