TD13 : Groupes d'homotopie supérieurs

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆⋆⋆	*facultatifs*

Exercice 1. Exemples de fibrations localement triviales ⋆

Soit F un espace topologique. Une *fibration localement triviale* de fibre F est une application continue $p : X \to B$ telle que, pour tout $b \in B$, il existe un voisinage $U \subseteq B$ de B et un homéomorphisme $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ tel que le diagramme suivant commute ;

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_{|p^{-1}(U)}"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

On la note $F \longrightarrow X \xrightarrow{p} B$. Dans le cas où la fibre F est un espace vectoriel, on parle aussi de *fibré vectoriel.* Notez que les *revêtements* sont des cas particuliers de fibrations localement triviales où la projection est un homéomorphisme locale et la fibre F un espace discret.

1. Montrer que pour tout n, on a une fibration localement triviale $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^n$. Elle est appelée *fibration de Hopf.*
2. On note $\mathbb{M}$ le ruban de Möbius. Montrer qu'il existe une fibration localement triviale
$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{S}^1 .$$
3. Montrer que la surjection canonique, $p : O(n) \to O(n)/O(n-k)$, associant à chaque matrice orthogonale ses k premières colonnes, est un fibré localement trivial de fibre $O(n-k)$.
4. Soit $1 \leq n \leq k$ des entiers. On note $V_n(\mathbb{R}^k)$ l'ensemble des familles de n vecteurs orthonormaux de $\mathbb{R}^k$, muni de la topologie de sous-espace $V_n(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k$. L'espace $V_n(\mathbb{R}^k)$ est appelé *variété de Stiefel.*
La *grassmannienne* $G_n(\mathbb{R}^k)$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n dans $\mathbb{R}^k$. On munit $G_n(\mathbb{R}^k)$ de la topologie quotient induite par l'application $q : V_n(\mathbb{R}^k) \to G_n(\mathbb{R}^k)$ qui envoie un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ sur l'espace engendré $\mathrm{span}(x_1, \ldots, x_n)$.
   (a) Montrer que $q : V_n(\mathbb{R}^k) \to G_n(\mathbb{R}^k)$ est une fibration localement triviale et donner une description explicite de la fibre.
   (b) Montrer que pour tous $1 \leq m \leq n \leq k$, l'application $p : V_n(\mathbb{R}^k) \to V_m(\mathbb{R}^k)$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m)$ est une fibration localement triviale et donner une description explicite de la fibre.

Exercice 2. Calculs de groupes d'homotopie ⋆

1. En utilisant le revêtement $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, montrer que $\pi_i(\mathbb{S}^1) \cong 0$ pour tout $i \geq 2$.
2. Montrer que la projection $\pi_n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ induit un isomorphisme $\pi_i(\mathbb{S}^n) \cong \pi_i(\mathbb{RP}^n)$ pour tout $i \geq 2$.
3. Montrer que la fibration de Hopf induit pour tout $i \geq 3$ un isomorphisme
$$\pi_i(\mathbb{S}^3) \cong \pi_i(\mathbb{S}^2) .$$
4. Montrer que l'inclusion $O(n-1) \to O(n)$ induit une application $\pi_i(O(n-1)) \to \pi_i(O(n))$ qui est un isomorphisme si $i < n-2$ et surjective si $i = n-2$.

Remarque : On pose $\pi_i(O) = \pi_i(O(n))$ si $n \geq i+2$. Un théorème fondamental en topologie algébrique, le théorème de périodicité de Bott, donne une description explicite de ces groupes. Pour tout $i \geq 0$, les groupes $\pi_i(O)$ sont donnés par

$$\pi_i(O) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, i \equiv 2,4,5,6 \pmod 8 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si}\, i \equiv 0,1 \pmod 8 \\ \mathbb{Z} & \text{si}\, i \equiv 3,7 \pmod 8 \end{cases}$$

5. Soit $1 \leq n \leq k$ des entiers. Montrer que $\pi_i(V_n(\mathbb{R}^k))$ est trivial pour tout $i < k-n$.

Exercice 3. Propriétés des fibrations localement triviales ⋆⋆

1. Soient $p : E \to B$ une fibration localement triviale et $f : X \to B$ une application continue. On note $f^*(X)$ le sous-espace topologique de $X \times E$ défini par
$$f^*(X) = \{(x,e) \in X \times E,\ f(x) = p(e)\},$$
appelé le *produit fibré* de X et E au-dessus de B. Montrer que l'application suivante est une fibration localement triviale ;
$$\begin{array}{rccc} f^*(p) : & f^*(X) & \to & X \\ & (x,e) & \mapsto & x\ . \end{array}$$
2. Une application continue, $p : X \to B$, est une *fibration* si, pour tout $n \geq 0$, et tout carré commutatif d'applications continues
$$\begin{tikzcd} I^n \times \{0\} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "j_0"] & X \arrow[d, "p"] \\ I^n \times I \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & B, \end{tikzcd}$$
il existe une application continue $\tilde{f} : I^n \times I \to X$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$ et $\tilde{f} \circ j_0 = f_0$.
Montrer que toute fibration localement triviale est une fibration.

Exercice 4. Autour du théorème de Hurewicz ⋆⋆

Soit X un espace topologique pointé. Pour tout $n \geq 1$, on considère $\iota_n \in H_n(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ un générateur. Le *morphisme d'Hurewicz* est l'application

$$h_n : \pi_n(X) \to H_n(X;\mathbb{Z}) : [f] \mapsto f_*(\iota_n)\ .$$

Théorème de Hurewicz : Soient $n \geq 1$ et X un espace topologique pointé tel que $\pi_k(X) = 0$ pour tout $k < n$. Alors $\tilde{H}_k(X) = 0$ pour tout $k < n$ et le morphisme de Hurewicz induit un isomorphisme

$$\tilde{H}_n(X) = \begin{cases} \pi_1(X)^{ab} & \text{si}\, n = 1 \\ \pi_n(X) & \text{si}\, n > 1 \end{cases}$$

Réciproquement, si X est simplement connexe et s'il existe $n \geq 2$ tel que $\tilde{H}_k(X) = 0$ pour tout $k < n$, alors on a $\pi_k(X) = 0$ pour tout $k < n$ et le morphisme de Hurewicz induit un isomorphisme $\pi_n(X) \cong H_n(X;\mathbb{Z})$.

1. On se place dans le cas $n = 1$. Montrer que ce morphisme coïncide avec le morphisme $\phi : \pi_1(X) \to H_1(X;\mathbb{Z})$ envoyant la classe d'homotopie d'un lacet sur la classe d'homologie du 1-cycle correspondant (introduit dans l'exercice 4 du TD9).
2. Remarquer que dans le cas $X = \mathbb{S}^n$, le morphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathbb{Z}$ correspond au degré.
3. Montrer que les morphismes d'Hurewicz sont naturels, i.e. pour toute application continue $f : X \to Y$ d'espaces pointés, on a un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} \pi_n(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "h_n"] & \pi_n(Y) \arrow[d, "h_n"] \\ H_n(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, "f_*"] & H_n(Y;\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

4. Déduire du théorème de Hurewicz que pour tout n, on a $\pi_k(\mathbb{S}^n) = 0$ pour $k < n$, et $\pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$. En particulier, deux applications pointées de la sphère $\mathbb{S}^n$ dans elle-même sont homotopes si et seulement si, elles ont le même degré.
5. Soit $n \geq 1$ et G un groupe (abélien si $n > 1$). On veut montrer qu'il existe un CW complexe pointé Y sans cellule autre que le point de base en dimensions plus petite que n et tel que $\pi_n(Y) \cong G$.
   (a) Montrer le cas $n = 1$ (voir Exercice 3 du TD6).
   (b) Adapter cette preuve au cas $n > 1$ en utilisant le théorème de Hurewicz.

Remarque. Pour une démonstration du théorème de Hurewicz, on se référera par exemple à A. Hatcher. Algebraic Topology, Theorem 4.31, Copyright 2002 by Cambridge University Press.

Exercice 5. Fibrations de Hopf quaternionique et octonionique ⋆⋆⋆

1. Montrer qu'en remplaçant le corps des complexes $\mathbb{C}$ par les quaternions $\mathbb{H}$ dans la fibration de Hopf, on obtient une fibration localement triviale $\mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^{4n+3} \xrightarrow{\pi} \mathbb{HP}^n$ sur l'espace projectif quaternionique, où $\mathbb{S}^{4n+3}$ correspond à la sphère unité dans $\mathbb{H}^{n+1}$.
2. En déduire pour $n = 1$, une suite exacte longue reliant les groupes d'homotopie des sphères $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^7$ et $\mathbb{S}^4 \cong \mathbb{HP}^1$.
3. On considère l'algèbre non-associative de dimension 8 des octonions de Cayley notée $\mathbb{O}$. Les éléments de $\mathbb{O}$ sont les paires de quaternions (a_1, a_2) et la multiplication est définie par

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1 - \bar{b}_2 a_2, a_2 \bar{b}_1 + b_2 a_1) \ .$$

   On voit $\mathbb{S}^{15}$ comme la sphère unité dans $\mathbb{O}^2$ et on définit une projection $\pi : \mathbb{S}^{15} \to \mathbb{S}^8 = \mathbb{O} \cup \{\infty\}$ par $(z_0, z_1) \mapsto z_0 z_1^{-1}$. Montrer que l'on définit ainsi une fibration localement triviale

$$\mathbb{S}^7 \longrightarrow \mathbb{S}^{15} \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^8 \ .$$