

TD2 : CW-complexes

Applications du cours ★ *à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
 Pour s'entraîner et approfondir ★★ *à traiter pendant la séance*
 Pour aller plus loin ★★★ *facultatifs*

Exercice 1. Premiers exemples de CW-complexes ★

1. Soit $A \subset X$ un sous-ensemble d'un espace topologique X . On considère l'inclusion canonique $A \hookrightarrow X$ et l'application constante $A \rightarrow *$. Montrer que le recollement $X \cup_A *$ est homéomorphe à X/A .
2. Soit $n \geq 0$. Est-ce que \mathbb{R}^n admet une structure de CW-complexe ? De CW-complexe fini ?
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que \mathbb{S}^n admet une structure de CW-complexe
 - (a) avec seulement deux cellules ;
 - (b) dont le k -squelette soit homéomorphe à \mathbb{S}^k pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
4. Munir le tore \mathbb{T} d'une structure de CW-complexe.

Exercice 2. Espaces projectifs ★★

Soit K un corps (on supposera ici que $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). L'espace $K\mathbb{P}^n$ est défini comme le quotient de $K^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action du groupe multiplicatif K^* agissant par homothéties. Pour tout $(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[x_0 : \dots : x_n]$ son image dans $K\mathbb{P}^n$. On définit $K\mathbb{P}^\infty$ comme l'union $\bigcup_{n \geq 0} K\mathbb{P}^n$.

1. (a) Le sous-groupe $\{\pm 1\}$ de \mathbb{R}^* agit sur \mathbb{S}^n par multiplication. Montrer que le quotient $\mathbb{S}^n / \{\pm 1\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.
 (b) Le sous-groupe \mathbb{S}^1 de \mathbb{C} constitué des nombres complexes de module 1 agit sur $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par multiplication. Montrer que le quotient $\mathbb{S}^{2n+1} / \mathbb{S}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.
 (c) En déduire que $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ sont compacts.
2. Montrer que $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ est homéomorphe à \mathbb{S}^1 et que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est homéomorphe à \mathbb{S}^2 .
3. Munir les espaces $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ pour $n \geq 0$, ainsi que $\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ et $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ d'une structure de CW-complexe.
4. (a) Pour $n \geq 1$, montrer que l'application

$$\begin{aligned} K^n &\rightarrow K\mathbb{P}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto [1 : x_1 : \dots : x_n] \end{aligned}$$

définit un homéomorphisme entre K^n et un ouvert U_0 de $K\mathbb{P}^n$ que l'on explicitera.

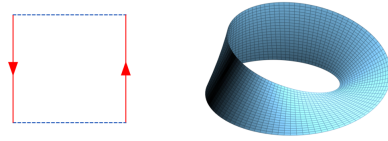
- (b) En déduire que $K\mathbb{P}^n$ admet un recouvrement par $n + 1$ ouverts homéomorphes à K^n et que le complémentaire de chacun de ces ouverts est homéomorphe à $K\mathbb{P}^{n-1}$.

Exercice 3. Propriétés des CW-complexes ★★

1. Soit X un CW-complexe, et soit C une cellule de dimension n de X . Considérons une application caractéristique $f : \bar{D}^n \rightarrow X$ de C . Montrer que l'adhérence de C dans X coïncide avec $f(\bar{D}^n)$.
2. Soit X un CW-complexe, et soit $k \geq 0$ un entier. Montrer que le k -squelette X_k de X est un sous-complexe de X .
3. Soit X un CW-complexe. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, l'espace quotient X_k / X_{k-1} est soit un point, soit homéomorphe à un bouquet de sphères de dimension k .
4. Montrer qu'un CW-complexe est
 - (a) normal, et en particulier séparé.
 - (b) compact si et seulement s'il est fini.
 - (c) connexe par arcs si et seulement si son 1-squelette l'est

Exercice 4. Les différents quotients du carré **

1. Le ruban de Möbius \mathbb{M} est défini comme l'espace topologique quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$, pour tous $x \in [0, 1]$. Munir \mathbb{M} d'une structure de CW-complexe.



2. La bouteille de Klein \mathbb{B} est l'espace topologique quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ pour tous $x, y \in [0, 1]$. Munir \mathbb{B} d'une structure de CW-complexe.



3. Montrer que $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe à l'espace topologique quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ pour tous $x, y \in [0, 1]$. En déduire une structure de CW-complexe sur $\mathbb{R}P^2$.

Exercice 5. Produits de CW-complexes ***

Soient X et Y deux CW-complexes.

1. Est-ce que le produit cartésien $X \times Y$ muni de la topologie produit est toujours un CW-complexe ?
2. Que se passe-t-il si X et Y sont localement compacts ? Si X ou Y est localement fini ?

