TD2 : Homotopie

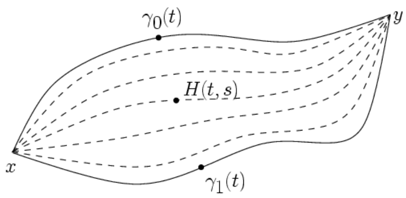
Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆⋆⋆	*facultatifs*

Partie 1 : Homotopies et types d'homotopie

Exercice 1. Généralités ⋆

On fixe X et Y deux espaces topologiques.

1. On suppose que X est connexe par arcs. Soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues. Montrer que si f et g sont homotopes, alors leurs images sont dans la même composante connexe par arcs de Y.
2. On suppose que Y est contractile. Montrer que deux applications continues $f, g : X \to Y$ sont toujours homotopes.
3. Montrer que si deux applications continues $f, g : X \to \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ sont telles que pour tout $x \in X$ on ait $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ (en norme euclidienne), alors f et g sont homotopes.
4. Soient p et q deux polynômes à coefficients complexes de même degré. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $R > r$, les applications continues
$$\{z \in \mathbb{C},\ |z| = R\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$$
données par $z \mapsto p(z)$ et $z \mapsto q(z)$ soient homotopes.
5. Soit $n \geq 1$. Montrer que toute application continue non-surjective $X \to \mathbb{S}^n$ est homotope à une application constante.
6. Soit $n \geq 1$. Montrer que si deux applications continues $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ sont telles que pour tout $x \in X$ on ait $|f(x) - g(x)| < 2$, alors f et g sont homotopes. En déduire qu'une application continue sans point fixe $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ est homotope à l'application $x \mapsto -x$.



Exercice 2. Équivalences d'homotopie ⋆

1. Si X et X', resp. Y et Y', sont des espaces topologiques homotopiquement équivalents, montrer que les produits $X \times Y$ et $X' \times Y'$ ont même type d'homotopie.
2. Soit C un espace contractile et soit X un espace topologique. Monter que $X \times C$ a le même type d'homotopie que X.
3. Rappelons que le ruban de Möbius est l'espace topologique $\mathbb{M}$, quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$. Montrer que $\mathbb{M}$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^1$.

Exercice 3. Type d'homotopie d'un complémentaire ⋆⋆

1. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^n$, avec $k < n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus E$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^{n-k-1}$.
2. Soit C un sous-ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus C$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^{n-1}$. *Indice : commencer par se ramener au cas où C est un convexe contenant 0 et contenu dans une boule de centre 0 et de rayon $1/2$.*

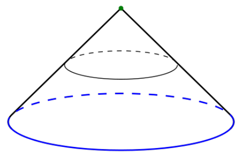
3. Soit X un espace topologique, et soient A et B deux sous-espaces de X, non-vides et distincts de X. Montrer que l'on peut avoir A et B homotopiquement équivalents, sans que $X \setminus A$ et $X \setminus B$ soient homotopiquement équivalents.
4. Montrer que le tore privé d'un point a le type d'homotopie d'un bouquet de deux cercles.

Exercice 4. Homotopies et cônes $\star\star$

Le cône CX d'un espace topologique X est l'espace quotient obtenu en écrasant le sous espace $X \times \{0\}$ de $X \times [0,1]$. Soit $q : X \times [0,1] \to CX$ l'application quotient. On note ι_X l'application

$$\begin{array}{cccc} \iota_X : & X & \to & CX \\ & x & \mapsto & q(x,1) \end{array}.$$

1. Montrer que pour tout espace X, le cône CX est contractile.
2. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que f est homotope à une application constante si et seulement s'il existe une application continue $F : CX \to Y$ telle que $F \circ \iota_X = f$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le cône $C\mathbb{S}^n$ est homéomorphe à la boule unité fermée $\mathbb{D}^{n+1}$.
4. Soient X et Y des espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application continue. Le cône de f, noté C_f, est l'espace topologique obtenu en recollant CX avec Y le long de f : plus précisément, c'est l'espace quotient de l'union disjointe $CX \cup Y$ par la relation $\iota_X(x) \sim f(x)$ pour tout $x \in X$.
   (a) Soit n un entier naturel. Montrer que si $X = \mathbb{S}^n$ et que Y est un CW-complexe de dimension inférieure ou égale à n, alors C_f est naturellement muni d'une structure de CW-complexe de dimension $n+1$.
   (b) Soit x_0 l'image du sommet du cône $q(X \times \{0\})$ dans C_f. Montrer que $C_f \setminus \{x_0\}$ se rétracte par déformation forte sur Y.
   (c) Soient $f, g : X \to Y$ deux applications homotopes. Montrer que C_f et C_g ont le même type d'homotopie.



Exercice 5. Composantes connexes par arcs des espaces fonctionnels $\star\star$

Soient X et Y des espaces topologiques avec X localement compact. On note $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y, muni de la topologie compacte-ouverte. Montrer que deux fonctions f, g sont dans la même composante connexe par arcs de l'espace $\mathcal{C}(X,Y)$ si, et seulement si elles sont homotopes.

Exercice 6. Rétractions $\star\star\star$

1. Soit X un espace topologique. Montrer que tout point de X est un rétracte de X. Est-ce toujours un rétracte par déformation de X ?
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un rétracte par déformation de $GL_n(\mathbb{R})$.
3. Le peigne est le sous-espace topologique $P \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$P = I \times \{0\} \cup \left(\left(\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\} \right) \times I \right),$$

   où $I = [0,1]$. Identifier les points de P qui sont des rétractes (resp. des rétractes par déformation, resp. des rétractes par déformation forte) de P.

Partie 2 : Groupes d'homotopie

Exercice 7. Sphéroïdes ⋆

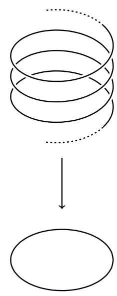
Soit (X, x_0) un espace topologique pointé, et soit $k \geq 1$ un nombre entier.

1. Soit $s_0 \in \mathbb{S}^k$ un point de la sphère $\mathbb{S}^k$. Décrire l'opération de groupe sur $\pi_k(X, x_0)$ en termes des applications $(\mathbb{S}^k, s_0) \to (X, x_0)$.
2. Si $k \geq 2$, montrer que le groupe $\pi_k(X, x_0)$ est abélien.

Exercice 8. Le groupe fondamental d'un cercle ⋆

Soit $\mathbb{S}^1$ le cercle unité du plan complexe.

1. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ définie par $\phi(t) = e^{2i\pi t}$ induit un homéomorphisme entre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{S}^1$.
2. Soit $c : [0,1] \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un lacet basé en 0. Montrer qu'il existe un unique chemin $\tilde{c} : [0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $\tilde{c}(0) = 0$ et $p \circ \tilde{c} = c$, où $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est la projection canonique.
3. On considère l'application qui à un lacet c associe $\tilde{c}(1) \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'elle induit un isomorphisme de groupe $\pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, 0) \to \mathbb{Z}$.
4. En déduire que $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.



Exercice 9. Point base et groupe d'homotopie d'un produit ⋆⋆

1. On suppose que X est connexe par arcs. Soient x_0 et x_1 des points de X. Montrer que les groupes $\pi_k(X, x_0)$ et $\pi_k(X, x_1)$ sont isomorphes pour tous $k \geq 0$.
2. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) des espaces topologiques pointés, et soit $k \geq 1$ un nombre entier. Montrer que

$$\pi_k(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_k(X, x_0) \times \pi_k(Y, y_0).$$

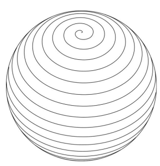
Partie 3 : Un peu de sphères

Exercice 10. Lacets remplissant la sphère ⋆⋆⋆

1. Soit $n \geq 1$ et soit γ un lacet sur la sphère $\mathbb{S}^n$ dont l'image ne soit pas toute la sphère. Montrer que γ est homotope à un lacet constant.
2. Soit $n \geq 1$. On admet le fait qu'il existe des lacets dont l'image soit égale à toute la sphère $\mathbb{S}^n$. En existe-t-il qui soient de plus homotopes à un lacet constant ?
3. Soit $n \geq 2$. Soit γ un chemin sur $\mathbb{S}^n$. Montrer qu'il existe une subdivision

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = 1$$

   (pour $k \geq 1$) de $[0,1]$ telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, la restriction $\gamma_{|[a_i, a_{i+1}]}$ soit homotope, relativement aux extrémités a_i et a_{i+1}, à un chemin d'image nulle part dense dans la sphère $\mathbb{S}^n$.
4. Soit $n \geq 2$. Montrer que tout lacet sur $\mathbb{S}^n$ est homotope à un lacet qui ne remplit pas toute la sphère. En déduire que tout lacet sur $\mathbb{S}^n$ est homotope à un lacet constant et que $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$. Cette propriété est-elle toujours vraie pour $n = 1$?



Exercice 11. Décomposition de $\mathbb{S}^3$ en tores pleins $\star\star\star$

Un *tore plein* est un espace homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ où $\mathbb{D}^2$ est le disque unité fermé dans $\mathbb{R}^2$. Dans cet exercice, on montre que $\mathbb{S}^3$ est la réunion de deux tores pleins collés le long de leur bord, et on utilise ce fait pour déterminer le type d'homotopie du complémentaire de deux cercles simplement enlacés dans $\mathbb{S}^3$.

1. On considère les deux parties A et B de $\mathbb{S}^3$ définies par :

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3,\ x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2})\} \qquad , \qquad B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3,\ x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2}\}.$$

   Monter que l'application

$$\phi : A \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (\frac{(x_1, x_2)}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}}, \sqrt{2}x_3, \sqrt{2}x_4)$$

   est un homéomorphisme. Construire de même un homéomorphisme $\psi : B \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$, et montrer que $A \cap B$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

2. Soit $C = \phi^{-1}(\mathbb{S}^1 \times \{0\})$ et $C' = \psi^{-1}(\mathbb{S}^1 \times \{0\})$. Montrer que $\mathbb{S}^3 \backslash (C \cup C')$ a le type d'homotopie du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.