

TD3 : Le groupe fondamental

Applications du cours ★ à préparer en l'avance et corriger en début de séance
 Pour s'entraîner et approfondir ★★ à traiter pendant la séance
 Pour aller plus loin ★★★ facultatifs

Partie 1 : Calculs de groupes fondamentaux et propriétés

Exercice 1. Groupe fondamental d'un groupe topologique ★

- Principe de Eckmann-Hilton.** Soit X un ensemble. On suppose que X est équipé de deux produits, c'est-à-dire de deux applications $*$: $X \times X \rightarrow X$ et \bullet : $X \times X \rightarrow X$ vérifiant les conditions suivantes :
 - Chaque loi admet une unité 1_* et 1_\bullet , respectivement.
 - L'application $*$: $X \times X \rightarrow X$ est compatible avec l'opération \bullet , c'est-à-dire :

$$(x \bullet x') * (y \bullet y') = (x * y) \bullet (x' * y').$$

Montrer que les deux applications produits sont égales, et qu'elles définissent une structure de monoïde commutatif sur X .

- Montrer que le groupe fondamental d'un groupe topologique est abélien. (On rappelle qu'un groupe topologique est un espace topologique muni d'une loi de groupe pour laquelle la multiplication et le passage à l'inverse sont continus).

Exercice 2. Degré d'une application ★

- Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une application continue et soit $x \in \mathbb{S}^1$. On note $n_x(f) \in \mathbb{Z}$ le nombre tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(\mathbb{S}^1, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(\mathbb{S}^1, f(x)) \\
 \text{deg} \downarrow & & \downarrow \text{deg} \\
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times n_x(f)} & \mathbb{Z}
 \end{array}$$

- Montrer que pour tout chemin d'origine x et d'extrémité y , on a un diagramme commutatif de morphisme de groupes (où $\phi_\gamma([\alpha]) = [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$)

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(\mathbb{S}^1, x) & \xrightarrow{\phi_\gamma} & \pi_1(\mathbb{S}^1, y) \\
 \text{deg} \searrow & & \swarrow \text{deg} \\
 & \mathbb{Z} &
 \end{array}$$

- Montrer que le nombre n_x est indépendant de x .
 Le nombre n_x s'appelle le degré de f , et on le note $\text{deg}(f)$.

- Montrer que $\text{deg}(f \circ g) = \text{deg}(f) \cdot \text{deg}(g)$.
- Montrer que deux applications sont homotopes si, et seulement si elles ont le même degré.
- Montrer que si $\text{deg}(f) \neq 0$ alors f est surjective. La réciproque est-elle vraie ?
- Montrer que si f est injective alors $|\text{deg}(f)| = 1$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. Groupe fondamental de certains groupes linéaires ★★

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer le nombre de composantes connexes des groupes suivants : $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que l'application $SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ qui à une matrice associe sa première colonne induit un homéomorphisme entre $SU_2(\mathbb{C})$ et \mathbb{S}^3 .
3. En déduire le groupe fondamental des groupes topologiques $SU_2(\mathbb{C})$, $U_2(\mathbb{C})$ et $GL_2(\mathbb{C})$.
4. Calculer le groupe fondamental de $SO_2(\mathbb{R})$, de $GL_2(\mathbb{R})_+$ (composante connexe de $GL_2(\mathbb{R})$ formée des matrices de déterminant positif) et de $GL_2(\mathbb{R})_-$ (composante connexe de $GL_2(\mathbb{R})$ formée des matrices de déterminant négatif).

Exercice 4. Homotopie libre ★★★

Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs, et soit x un point de X .

On appelle *lacet libre* dans X une application continue $f : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $f(0) = f(1)$. Deux lacets libres f_0 et f_1 sont dits *librement homotopes* s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que, pour tout $t \in [0, 1]$, on ait

$$H(t, 0) = f_0(t), \quad H(t, 1) = f_1(t), \quad H(0, t) = H(1, t).$$

Montrer que l'ensemble des classes d'homotopie libre est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(X, x)$.

Partie 2 : Applications

Exercice 5. Théorème fondamental de l'algèbre ★

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes. On veut montrer que P admet une racine dans \mathbb{C} . On raisonne par l'absurde en supposant que P n'a pas de racine complexe.

1. Choisir ϕ un homéomorphisme entre $I = [0, 1[$ et $[0, +\infty[$.
2. Montrer que l'on peut étendre à tout $[0, 1]$ l'homotopie $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1[\rightarrow \mathbb{S}^1$ donnée par la formule

$$H(z, t) = \frac{P(\phi(t)z)}{|P(\phi(t)z)|}.$$

3. En déduire une contradiction sur le degré n de P .

Exercice 6. Théorème de Borsuk-Ulam ★★

Le théorème de Borsuk-Ulam dit que pour tout $n \geq 1$ et pour toute application continue $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

1. Prouver le théorème pour $n = 1$.
2. On souhaite montrer le théorème pour $n = 2$. On raisonne par l'absurde et on suppose donc qu'il existe une application $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ qui vérifie, pour tout x , $f(x) \neq f(-x)$.
 - (a) Montrer que si $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ vérifie $g(-x) = -g(x)$ alors g est de degré impair.
 - (b) Soit l'application $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ définie par

$$g : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Observer que $g(-x) = -g(x)$ et en déduire le théorème pour $n = 2$ en considérant $g \circ \iota : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ où ι est l'inclusion de \mathbb{S}^1 comme équateur dans \mathbb{S}^2 .

3. Montrer le théorème de Lusternik-Schnirelmann : Soient A, B, C trois fermés de \mathbb{S}^2 dont la réunion recouvre \mathbb{S}^2 . Montrez que l'un des fermés contient deux points antipodaux.

Exercice 7. Théorème de Brouwer ***

Soit $n \geq 1$. On note \mathbb{D}^n la boule unité fermée de \mathbb{R}^n . Le théorème de Brouwer dit que toute application continue $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ admet un point fixe.

1. Prouver le théorème pour $n = 1$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de rétraction $r : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$.
3. En déduire le théorème pour $n = 2$.
4. Expliquer pourquoi le théorème de Brouwer est équivalent au résultat suivant : soit Δ^n un n -simplexe. Alors toute fonction $f : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ admet un point fixe.
5. Une *triangulation* de Δ^2 est la donnée d'un ensemble fini S de points de Δ^2 contenant les sommets de Δ^2 , ainsi que d'un ensemble fini T de triangles de sommets appartenant à S , d'intérieurs disjoints, recouvrant Δ et telle que l'intersection de deux tels triangles soit ou bien vide, ou bien un côté de chacun des deux, ou bien un sommet de chacun des deux.

On considère une triangulation (S, T) d'un 2-simplexe Δ^2 (que l'on voit comme un triangle $A_1A_2A_3$).

Un *coloriage de Sperner* est une fonction $c : S \rightarrow \{1, 2, 3\}$ telle que

— Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $c(A_i) = i$.

— Pour tout $v \in S$ appartenant au côté A_iA_j , $c(v) \in \{i, j\}$.

Montrer que pour tout coloriage de Sperner c il existe nécessairement un triangle $B_1B_2B_3 \in T$ tel que $c(\{B_1, B_2, B_3\}) = \{1, 2, 3\}$.

6. On se propose de donner une autre démonstration du théorème de Brouwer. Soit $f : \Delta^2 \rightarrow \Delta^2$ une fonction continue (supposée sans point fixe). Expliquer comment on peut utiliser f pour munir toute triangulation (S, T) de Δ^2 d'un coloriage de Sperner. En prenant des triangulations de diamètres de plus en plus petits, aboutir à une contradiction.

