TD4 : Variétés topologiques

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆⋆⋆	*facultatifs*

Exercice 1. Exemples de variétés topologiques ⋆

1. Soit $n \geq 0$. Montrer que les espaces suivants sont des variétés topologiques de dimension n.
   (a) L'espace $\mathbb{R}^n$ et n'importe quel ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$
   (b) Le graphe $\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$ d'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
   (c) La sphère $\mathbb{S}^n$
   (d) L'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$
   (e) La réunion disjointe $M \sqcup N$ de deux variétés topologiques M et N de dimension n
2. Montrer qu'un ouvert / une composante connexe d'une variété est une variété.
3. Montrer qu'un espace topologique est une variété de dimension 0 si et seulement s'il s'agit d'un espace discret dénombrable.

Exercice 2. Produits de variétés et surfaces classiques ⋆

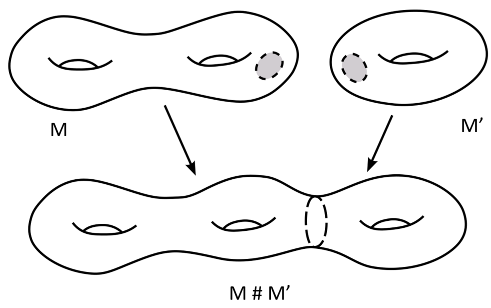
Soit M et N deux variétés topologiques de dimensions respectives m et n.

1. Montrer que le produit $M \times N$ est une variété topologique de dimension $m + n$.
2. Pour $n \geq 1$, on définit le tore de dimension n noté $\mathbb{T}^n$ comme le produit de n copies du cercle,
$$\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$$
   Montrer que $\mathbb{T}^n$ est une variété topologique de dimension n.
3. Munir le ruban de möbius et la bouteille de Klein d'une structure de variété topologique.

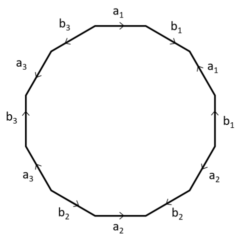
Exercice 3. Somme connexe ⋆

Soient M et M' deux variétés topologiques connexes de dimension $n \geq 1$.
On note $B = \mathring{\mathbb{D}}^n$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$, et $B_{1/2} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1/2\}$ la boule ouverte de rayon moitié et de bord $S_{1/2}$. Soient $\phi : B \to M$ et $\phi' : B \to M'$ deux homéomorphismes sur leur image et $f : \phi(S_{1/2}) \to \phi(S_{1/2})$ la restriction de $\phi' \circ \phi^{-1}$.

On appelle *somme connexe* de M et M' l'espace topologique obtenu par recollement de $M - \phi(B_{1/2})$ et de $M' - \phi'(B_{1/2})$ par f :
$$M\#M' = (M - \phi(B_{1/2})) \sqcup_f (M' - \phi'(B_{1/2}))\ .$$
On peut montrer qu'à homéomorphisme près, la somme connexe $M\#M'$ ne dépend pas du choix de ϕ, ϕ'.



1. Montrer que $M\#M'$ est une variété topologique de dimension n.
2. Si $n \geq 2$, montrer que $M\#M'$ est connexe si et seulement si M et M' sont connexes.
3. Montrer que $M\#\mathbb{S}^n$ est homéomorphe à M.
4. Montrer que la somme connexe de deux plans projectifs $\mathbb{RP}^2$ est une bouteille de Klein.
5. On note Σ_g la surface compacte de genre g introduite en cours comme le recollement d'un polygone à $4g$ le long de paires d'arrêtes. Montrer que la somme connexe de g tores $\mathbb{T}$ est homéomorphe à Σ_g. En déduire que Σ_g est une variété topologique dimension 2.



Remarque. On peut montrer que toute surface topologique compacte connexe est homéomorphe à une sphère, à la somme connexe de $g \geq 1$ copies du tore $\mathbb{T}$ ou à la somme connexe de $g \geq 1$ copies du plan projectif réel $\mathbb{RP}^2$ et deux telles surfaces ne sont pas homéomorphes.

Exercice 4. Classification des variétés de dimension 1 $\star\star\star$

1. Montrer qu'une variété topologique compacte connexe de dimension 1 est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$.
2. Montrer qu'une variété topologique connexe non compacte de dimension 1 est homéomorphe à $\mathbb{R}$.
3. En déduire qu'une variété topologique de dimension 1 est somme disjointe d'un ensemble dénombrable d'espaces homéomorphes à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{S}_1$.