TD5 : Le théorème de Van Kampen

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆ ⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆ ⋆ ⋆	*facultatifs*

Théorème de Van Kampen : Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement ouvert $\{U, V\}$ tels que U, V et $U \cap V$ sont connexes par arcs. On considère les injections canoniques

$$\pi_1(i_u) : \pi_1(U \cap V) \to \pi_1(U) \quad \text{and} \quad \pi_1(i_v) : \pi_1(U \cap V) \to \pi_1(V)$$

où les groupes fondamentaux sont pointés en $x_0 \in U \cap V$. Alors le groupe fondamental de X s'identifie à la somme amalgamée de $\pi_1(U)$ et $\pi_1(V)$ au dessus de $\pi_1(U \cap V)$, i.e

$$\pi_1(X) = \pi_1(U) *_{\pi_1(U\cap V)} \pi_1(V) \ .$$

Exercice 1. Présentations et abélianisés ⋆

1. Donner une présentation finie des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
2. Montrer que les groupes $\langle a, b; abab^{-1}\rangle$ et $\langle u, v; u^2v^2\rangle$ sont isomorphes.
   De même pour $\langle a, b; a^3b^{-2}\rangle$ et $\langle u, v; uvuv^{-1}u^{-1}v^{-1}\rangle$.
3. Montrer que l'abélianisé du groupe $\mathrm{G} = \langle t_1, \ldots, t_n; t_1^2t_2^2 \ldots t_n^2\rangle$ est $\mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

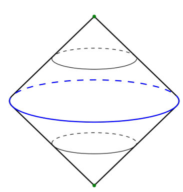
Exercice 2. Calculs de groupes fondamentaux ⋆

Un espace pointé (X, x_0) est dit *correctement pointé* si le point x_0 admet un voisinage ouvert, V, tel qu'il existe une homotopie $H : V \times [0, 1] \to V$, vérifiant

$$H(x, 0) = x,\ \ H(x, 1) = x_0 \quad \text{et} \quad H(x_0, t) = x_0$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in V$. La propriété d'être correctement pointé pour (X, x_0) implique, en particulier, que x_0 est un rétracte par déformation du voisinage V. On peut montrer que si X est un CW-complexe, alors (X, x_0) est correctement pointé pour tout x_0.

1. Montrer que si M est une variété, (M, x_0) est correctement pointé pour tout $x_0 \in M$.
2. Bouquet d'espaces Montrer que si (X, x_0) et (Y, y_0) sont deux espaces correctement pointés avec X et Y connexes par arcs, alors on a
$$\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y) \ .$$
3. Espace projectif. Calculer le groupe fondamental de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ pour tout $n \geq 0$.
4. Variétés épointées. Soit V une variété topologique de dimension $n \geq 3$. Soit X un ensemble fini de points de V. Montrer que l'inclusion $V \backslash X \hookrightarrow V$ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux.
5. Suspension. Soit X un espace topologique et SX sa suspension (le quotient de $X \times [0, 1]$ obtenu en écrasant $X \times \{0\}$ d'une part et $X \times \{1\}$ d'autre part). Si X est connexe par arcs, montrer que SX est simplement connexe. Donner un contre-exemple si X n'est pas connexe par arcs.



Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à coline.emprin@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T12.

Exercice 3. Espaces topologiques à groupe fondamental donné ⋆

Soit X un espace connexe par arcs, $f : (\mathbb{S}^{n-1}, 1) \to (X, x_0)$ une application pointée et $Y = X \cup_f e^n$.

1. Montrer que
   (a) Si $n \geq 3$, l'injection de X dans Y induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux
   $$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, x_0) \ .$$
   (b) Si $n = 2$, l'application f définit un élément $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0)/[f]$.
   (c) Si $n = 1$ et si (X, x_0) est correctement pointé, alors $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0) * \mathbb{Z}$.
2. Construire un espace X ayant comme groupe fondamental $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Soit G un groupe de présentation finie. Construire un espace topologique dont le groupe fondamental est isomorphe à G.
4. Soit p et q deux entiers premiers entre eux. Notons r la rotation de $\mathbb{R}^3$, d'axe vertical orienté suivant la base canonique, et d'angle $2\pi/p$, et notons σ la symétrie orthogonale par rapport au plan $z = 0$. *L'espace lenticulaire* $L_{p,q}$ est le quotient de la boule E^3 par la relation d'équivalence R qui identifie un point x du bord S^2 de E^3 avec le point $\sigma(r^q(x))$. Calculer $\pi_1(L_{p,q})$.

Exercice 4. Pour aller plus loin ⋆⋆

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient A_1 et A_2 deux sous-espaces affines de codimension ≥ 2 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Quel est le groupe fondamental du complémentaire de $A_1 \cup A_2$ dans $\mathbb{R}^n$?
2. Calculez le groupe fondamental du cercle à deux origines, i.e., l'espace topologique obtenu en recollant deux copies de $\mathbb{S}^1$ le long de $\mathbb{S}^1 \backslash \{1\}$.
3. Calculer le groupe fondamental de la droite à deux origines.
4. Calculez le groupe fondamental d'un bouquet d'un ensemble dénombrable de copies de $\mathbb{S}^1$.

Exercice 5. Théorème de Brouwer ⋆⋆⋆

Soit $n \geq 1$. On note $\mathbb{D}^n$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Le théorème de Brouwer dit que toute application continue $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ admet un point fixe.

1. Prouver le théorème pour $n = 1$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de rétraction $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ et en déduire le théorème pour $n = 2$.
3. Expliquer pourquoi le théorème de Brouwer est équivalent au résultat suivant : soit Δ^n un n-simplexe. Alors toute fonction $f : \Delta^n \to \Delta^n$ admet un point fixe.
4. Une *triangulation* de Δ^2 est la donnée d'un ensemble fini S de points de Δ^2 contenant les sommets de Δ^2, ainsi que d'un ensemble fini T de triangles de sommets appartenant à S, d'intérieurs disjoints, recouvrant Δ et telle que l'intersection de deux tels triangles soit ou bien vide, ou bien un côté de chacun des deux, ou bien un sommet de chacun des deux. On considère une triangulation (S, T) d'un 2-simplexe Δ^2 (que l'on voit comme un triangle $A_1A_2A_3$).
   Un *coloriage de Sperner* est une fonction $c : S \to \{1, 2, 3\}$ telle que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $c(A_i) = i$ et pour tout $v \in S$ appartenant au côté A_iA_j, $c(v) \in \{i, j\}$.
   Montrer que pour tout coloriage de Sperner c il existe nécessairement un triangle $B_1B_2B_3 \in T$ tel que $c(\{B_1, B_2, B_3\}) = \{1, 2, 3\}$.
5. On se propose de donner une autre démonstration du théorème de Brouwer. Soit $f : \Delta^2 \to \Delta^2$ une fonction continue (supposée sans point fixe). Expliquer comment on peut utiliser f pour munir toute triangulation (S, T) de Δ^2 d'un coloriage de Sperner. En prenant des triangulations de diamètres de plus en plus petits, aboutir à une contradiction.