TD6 : Le théorème de Van Kampen

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆⋆⋆	*facultatifs*

Théorème de Van Kampen : Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement formé de deux ouverts U et V tels que U, V et $U \cap V$ sont connexes par arcs. On considère les injections canoniques $\pi_1(i_u) : \pi_1(U \cap V) \to \pi_1(U)$ et $\pi_1(i_v) : \pi_1(U \cap V) \to \pi_1(V)$ où les groupes fondamentaux sont pointés en $x_0 \in U \cap V$. Alors le groupe fondamental de X s'identifie à la somme amalgamée de $\pi_1(U)$ et $\pi_1(V)$ au dessus de $\pi_1(U \cap V)$, i.e

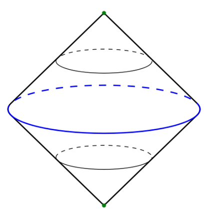
$$\pi_1(X) = \pi_1(U) *_{\pi_1(U\cap V)} \pi_1(V) \ .$$

Exercice 1. Présentations et abélianisés ⋆

1. Donner une présentation finie des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
2. Montrer que les groupes $\langle a, b; abab^{-1}\rangle$ et $\langle u, v; u^2v^2\rangle$ sont isomorphes. De même pour $\langle a, b; a^3b^{-2}\rangle$ et $\langle u, v; uvuv^{-1}u^{-1}v^{-1}\rangle$.
3. Montrer que l'abélianisé du groupe $\mathrm{G} = \langle t_1, \dots, t_n; t_1^2t_2^2 \dots t_n^2\rangle$ est $\mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Calculs de groupes fondamentaux ⋆

1. Bouquet d'espaces On rappelle qu'un espace pointé (X, x_0) est dit *correctement pointé* si le point x_0 admet un voisinage ouvert, V, tel qu'il existe une homotopie $H : V \times [0, 1] \to V$, vérifiant $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = x_0$ et $H(x_0, t) = x_0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in V$. La propriété d'être correctement pointé pour (X, x_0) implique, en particulier, que x_0 est un rétracte par déformation du voisinage V. On peut montrer que si X est un CW-complexe, alors (X, x_0) est correctement pointé pour tout x_0.
   (a) Montrer que si M est une variété, (M, x_0) est correctement pointé pour tout $x_0 \in M$.
   (b) Montrer que si (X, x_0) et (Y, y_0) sont deux espaces correctement pointés avec X et Y connexes par arcs, alors on a $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$.
2. Espace projectif. Calculer le groupe fondamental de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ pour tout $n \geq 0$.
3. Variétés épointées. Soit V une variété topologique de dimension $n \geq 3$. Soit X un ensemble fini de points de V. Montrer que l'inclusion $V \backslash X \hookrightarrow V$ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux.
4. Suspension. Soit X un espace topologique et SX sa suspension (le quotient de $X \times [0, 1]$ obtenu en écrasant $X \times \{0\}$ d'une part et $X \times \{1\}$ d'autre part). Si X est connexe par arcs, montrer que SX est simplement connexe. Donner un contre-exemple si X n'est pas connexe par arcs.



Exercice 3. Espaces topologiques à groupe fondamental donné ⋆

Soit X un espace connexe par arcs, $f : (\mathbb{S}^{n-1}, 1) \to (X, x_0)$ une application pointée et $Y = X \cup_f e^n$.

1. Montrer que
   (a) Si $n \geq 3$, l'injection de X dans Y induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, x_0)$.

(b) Si $n = 2$, l'application f définit un élément $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0)/[f]$.

(c) Si $n = 1$ et si (X, x_0) est correctement pointé, alors $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0) * \mathbb{Z}$.

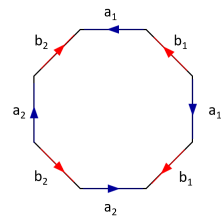
2. Construire un espace X ayant comme groupe fondamental $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Soit G un groupe de présentation finie. Construire un espace topologique dont le groupe fondamental est isomorphe à G.
4. Soit p et q deux entiers premiers entre eux. Notons r la rotation de $\mathbb{R}^3$, d'axe vertical orienté suivant la base canonique, et d'angle $2\pi/p$, et notons σ la symétrie orthogonale par rapport au plan $z = 0$.

   L'espace lenticulaire $L_{p,q}$ est le quotient de la boule E^3 par la relation d'équivalence R qui identifie un point x du bord S^2 de E^3 avec le point $\sigma(r^q(x))$. Calculer $\pi_1(L_{p,q})$.

Exercice 4. Groupe fondamental et surfaces ⋆⋆

Une *représentation planaire d'une surface* est un polygone possédant un nombre pair de côtés, appelés arêtes, munis d'une identification deux à deux, tel que l'espace quotient soit homéomorphe à la surface. L'identification des arêtes est représentée par une étiquette et une orientation.

Par exemple, la représentation planaire ci-contre correspond à la somme connexe de deux tores $\mathbb{T}\#\mathbb{T}$.



Considérons une représentation planaire donnée par un certain polygone et on s'intéresse au bord de ce polygone. On choisit un sommet de ce bord et un sens de rotation. On associe alors au polygone un mot du type $a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_m}^{\epsilon_m}$ obtenu en notant dans l'ordre rencontré les étiquettes avec un exposant $+1$ ou -1 suivant que l'orientation de l'arrête correspond ou non au sens de rotation.

Si on change de point de base, on obtient le même mot à permutation cyclique près. Changer l'orientation transforme le mot en son inverse. Ce mot, défini à permutation cyclique près et à inverse près, s'appelle le *mot* associé à la surface. Il la détermine entièrement car il caractérise le polygone et les paires d'arêtes orientées à identifier.

Le mot associé à une surface est *réduit*, si lors de la réalisation de la surface à partir du polygone, tous les sommets sont identifiés. On vérifie que le mot $aba^{-1}b^{-1}$ est réduit mais pas le mot $acbc^{-1}a^{-1}b^{-1}$. Deux mots ou leurs polygones associés sont dits *équivalents* s'ils correspondent à des surfaces homéomorphes. On note $\sim$ cette relation d'équivalence. On peut montrer que tout polygone est équivalent à une sphère ou à un polygone dont tous les sommets sont identifiés.

1. Donner une représentation planaire et un mot associés aux surfaces suivantes : la sphère $\mathbb{S}^2$, le tore $\mathbb{T}$, la bouteille de Klein $\mathbb{B}$, le plan projectif réel $\mathbb{RP}^2$ et la surface orientable S_g de genre g.
2. Montrer que le mot associé à la somme connexe de deux surfaces est le produit des mots associés aux deux surfaces.
3. Soit A un mot et a une arrête. Montrer que le mot Aaa^{-1} est équivalent à A si $A \neq \varnothing$.
4. Montrer que si S est une surface compact connexe, de mot réduit associé f, écrit avec n lettres, son groupe fondamental est $\pi_1(S) = \langle t_1, \dots, t_n ; f \rangle$.
5. En déduire le groupe fondamental de $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{RP}^2$ et S_g.
6. Conclure que la sphère $\mathbb{S}^2$, les tores à g trous et les sommes connexes de plans projectifs sont des surfaces non homéomorphes. En déduire que si deux surfaces, compactes et connexes, ont le même groupe fondamental, elles sont homéomorphes.

Remarque Un résultat analogue est faux en dimension 3, comme le montrent les espaces lenticulaires : les espaces lenticulaires $L_{5,1}$ et $L_{5,2}$ ont même groupe fondamental (voir Exercice 4) mais on peut montrer qu'ils n'ont pas le même type d'homotopie.

Exercice 5. Complémentaire de deux espaces affines $\star\star$

Soit n un nombre entier strictement positif, et soient A_1 et A_2 deux sous-espaces affines de codimension ≥ 2 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Quel est le groupe fondamental du complémentaire de $A_1 \cup A_2$ dans $\mathbb{R}^n$? On discutera suivant les codimensions de A_1 et A_2.

Exercice 6. Pour aller plus loin $\star\star\star$

1. Calculez le groupe fondamental du cercle à deux origines, i.e., l'espace topologique obtenu en recollant deux copies de $\mathbb{S}^1$ le long de $\mathbb{S}^1\backslash\{1\}$.
2. Calculer le groupe fondamental de la droite à deux origines, i.e., l'espace topologique obtenu en identifiant deux copies de $\mathbb{R}$ le long de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
3. Calculez le groupe fondamental d'un bouquet d'un ensemble dénombrable de copies de $\mathbb{S}^1$.
4. Soient X et Y deux ensembles finis disjoints de points de S_g. Calculer le groupe fondamental de $S_g\backslash X$, du quotient S_g/Y et de $(S_g\backslash X)/Y$.