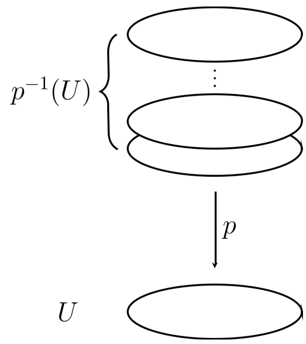
TD7 : Généralités sur les revêtements

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆ ⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆ ⋆ ⋆	*facultatifs*

Exercice 1. Quelques propriétés ⋆

Soit $p : E \to B$ un revêtement.



1. On suppose que B est connexe et localement connexe. Montrer que pour toute composante connexe C de E, la restriction $p_{|C} : C \to B$ est un revêtement.
2. Soit $p : E \to B$ un revêtement à fibres finies. Montrer que pour tout revêtement $q : X \to E$, l'application $p \circ q$ est un revêtement.
3. On suppose que E est connexe par arcs et que p n'est pas un homéomorphisme. Montrer que B n'est pas simplement connexe.
4. On suppose que p est un revêtement à deux feuillets. Montrer qu'il admet un automorphisme non-trivial, i.e., il existe un homéomorphisme $f : E \to E$ différent de l'identité, tel que $p \circ f = p$. Donner un exemple de revêtement à trois feuillets qui n'admet pas d'automorphisme non-trivial.

Exercice 2. Produit et tiré en arrière de revêtements ⋆

Soient $p : E \to B$ et $p : E' \to B'$ des revêtements et $f : X \to B$ une application continue.

1. Montrer que $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ est un revêtement. Un produit infini de revêtements est-il toujours un revêtement ?
2. On note $f^*(X)$ le sous-espace topologique de $X \times E$ défini par $f^*(X) = \{(x, e) \in X \times E,\ f(x) = p(e)\}$, appelé le *produit fibré* de X et E au-dessus de B. Montrer que l'application suivante est un revêtement :

$$\begin{array}{rccc} f^*(p): & f^*(X) & \to & X \\ & (x,e) & \mapsto & x\ . \end{array}$$

Exercice 3. Actions de groupes ⋆

Soit X un espace topologique localement compact sur lequel un groupe discret G agit continûment. On fait les deux hypothèses suivantes :

(i) L'action de G est libre, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$, on a $g \cdot x = x$ si et seulement si $g = e$.

(ii) L'action de G est propre, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble $\{g \in G,\ K \cap gK \neq \emptyset\}$ est fini.

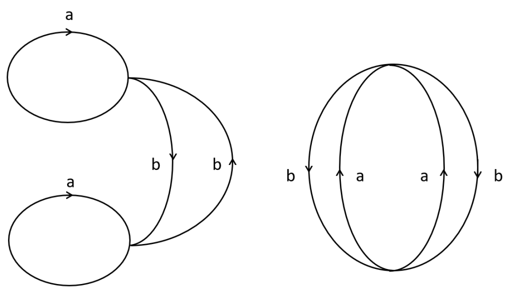
1. Montrer que l'application quotient $p : X \to G \backslash X$ est un revêtement.
2. Montrer que le quotient est $G \backslash X$ est séparé.
3. Montrer que si X est connexe et localement connexe par arcs, le groupe d'automorphismes du revêtement p est isomorphe à G.

Exercice 4. Exemples de revêtements ⋆ ⋆

1. Montrer que l'application quotient $\mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un revêtement. Combien a-t-il de feuillets ?
2. Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ l'application exponentielle $x \mapsto e^{2i\pi x}$. A quelle condition sur A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ la restriction $p_{|A} : A \to \mathbb{S}^1$ est-elle un revêtement ?

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à coline.emprin@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T12.

3. Construire un revêtement du ruban de Möbius par un cylindre. En existe-t-il un avec un nombre impair de feuillets ?
4. Construire un revêtement non-trivial du ruban de Möbius par lui-même. En existe-t-il un avec un nombre pair de feuillets ?
5. La bouteille de Klein K est l'espace topologique obtenu comme quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x,0) \sim (1-x,1)$ et $(0,y) \sim (1,y)$. Construire un revêtement de la bouteille de Klein par $\mathbb{R}^2$, puis par le tore.
6. Donner un revêtement non-trivial du groupe unitaire $U(n)$.
7. Donner un revêtement non-trivial de l'espace topologique X obtenu comme réunion de la sphère $\mathbb{S}^2$ avec l'un de ses diamètres.
8. Dessiner tous les revêtements à 2 feuillets du bouquet de deux cercles.



Exercice 5. Homéomorphismes locaux ⋆⋆

1. Donner un exemple d'un homéomorphisme local surjectif qui ne soit pas un revêtement.
2. Donner un exemple d'un homéomorphisme local surjectif qui ne satisfait pas la propriété de relèvement des chemins.
3. Soit $p : E \to B$ un homéomorphisme local avec E séparé.
   (a) On suppose que toutes les fibres de p sont finies de même cardinal non-nul. Montrer que p est un revêtement. Est-ce toujours vrai si les fibres ne sont plus supposées de cardinal fini ?
   (b) On suppose que B est connexe et que p est propre, c'est-à-dire qu'elle est fermée et que l'image réciproque de tout singleton est compacte. Montrer que p est un revêtement.
4. Soit P un polynôme complexe de degré $n > 0$. Soit $Z \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des racines du polynôme dérivé P', et $A = P(Z) \subset \mathbb{C}$. Montrer que l'application $P_{|\mathbb{C} \setminus P^{-1}(A)} : \mathbb{C} \setminus P^{-1}(A) \to \mathbb{C} \setminus A$ est un revêtement à n feuillets.

Exercice 6. Revêtement à nombre infini de feuillets ⋆⋆⋆

Soit X un espace topologique qui s'écrit comme union de deux ouverts connexes U et V. Montrer que si l'intersection $U \cap V$ n'est pas connexe, alors X admet un revêtement connexe avec un nombre infini de feuillets.