

## TD7 : Revêtements et groupes fondamentaux

Applications du cours ★ *à préparer en l'avance et corriger en début de séance*  
 Pour s'entraîner et approfondir ★★ *à traiter pendant la séance*  
 Pour aller plus loin ★★★ *facultatifs*

### Exercice 1. Échauffement ★

1. Soit  $n \geq 1$  un entier. Montrer que  $\mathbb{R}^2$  n'est pas homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  pour  $n \neq 2$ .
2. Soit  $X$  un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs de groupe fondamental fini. Montrer que toute application continue  $X \rightarrow \mathbb{S}^1$  est homotope à une application constante.
3. Calculer à l'aide d'un revêtement universel, le groupe fondamental de la sphère  $\mathbb{S}^1$  et de l'espace projectif  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  pour tout  $n \geq 2$ .

### Exercice 2. Classification complète ★

Décrire à isomorphisme près tous les revêtements connexes des espaces suivants.

- (a) Le cercle  $\mathbb{S}^1$  ;
- (b) Le bouquet  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  (uniquement ceux à deux feuilletts) ;
- (c) L'espace projectif réel  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  pour  $n \geq 2$  ;
- (d) Le tore  $\mathbb{T}$  ;
- (e) Le ruban de Möbius  $M$ .

### Exercice 3. Bouquet de deux plans projectifs ★

1. Déterminer le groupe fondamental du bouquet de deux plans projectifs  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \vee \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ .
2. Décrire, à isomorphisme près, tous les revêtements connexes de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \vee \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ .

### Exercice 4. Graphes et groupes libres ★★

On appelle *graphe fini*  $\mathcal{G}$  la donnée d'un ensemble fini de sommets  $S$ , et d'un ensemble fini d'arêtes  $A \subseteq S \times S$ . La réalisation topologique de  $\mathcal{G}$  est le quotient de

$$\coprod_{s \in S} \{s\} \coprod_{a \in A} [0, 1] \times \{a\}$$

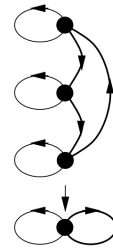
par les relations  $(1, a) = p_2(a)$  et  $(0, a) = p_1(a)$ , où  $p_i$  est la  $i$ -ème projection  $A \rightarrow S$  pour  $i = 1, 2$ . On ne fera pas de différence par la suite entre graphe et l'espace topologique qui lui est associé.

1. Montrer que tout revêtement à fibres finies d'un graphe fini est encore un graphe fini.
2. On appelle caractéristique d'Euler d'un graphe fini connexe  $\mathcal{G}$  l'entier  $\chi(\mathcal{G}) = \#S - \#A$ .  
Montrer qu'un graphe fini connexe  $\mathcal{G}$  est homotope au bouquet de  $1 - \chi(\mathcal{G})$  cercles.
3. Soit  $L$  un groupe libre à  $n \geq 1$  générateurs, et  $H$  un sous-groupe d'indice  $k$  de  $L$ . Montrer que  $H$  est un groupe libre, dont on donnera le nombre de générateurs.
4. Soit  $n \geq 3$ . Montrer que le groupe libre à 2 générateurs admet un sous-groupe isomorphe au groupe libre à  $n$  générateurs. Donner des générateurs d'un tel sous-groupe pour  $n = 3$ .

**Exercice 5. Bouquets de cercles ★★**

Soit  $k \geq 1$  un entier.

1. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements connexes à 2 feuillets du bouquet de  $k$  cercles ?
2. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements galoisiens à 3 feuillets du bouquet de  $k$  cercles ?
3. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements à 3 feuillets du bouquet de 2 cercles ? Les dessiner.



**Exercice 6. Espaces topologiques finis ★★**

1. Montrer que tout espace topologique fini et connexe par arcs de cardinal 2 ou 3 est simplement connexe.
2. On considère l'espace topologique  $X$  de cardinal 4 donné par l'ensemble  $\{a, b, c, d\}$  avec pour base d'ouverts

$$\{\{a\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}.$$

Montrer que  $X$  n'est pas simplement connexe en construisant un revêtement non-trivial. Déterminer le groupe fondamental de  $X$ , et tous les espaces topologiques connexes par arcs qui revêtent  $X$ .

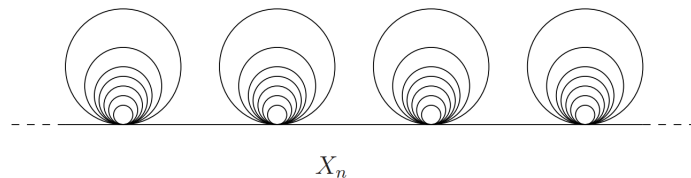
3. Construire un espace topologique fini connexe par arcs dont le groupe fondamental ne soit pas abélien.

**Exercice 7. Le retour de la boucle d'oreille hawaïenne ★★★**

*Extrait de l'exercice E.26 du polycopié "Topologie algébrique élémentaire", Frédéric Paulin*

On rappelle que la boucle d'oreille hawaïenne est le sous-ensemble  $H \subset \mathbb{R}^2$  défini comme la réunion des cercles  $S_n$  de centre  $(0, 1/n)$  et de rayon  $1/n$ , pour les entiers  $n \geq 1$ . On note  $x$  le point de base commun à chacun des cercles.

Pour tout  $n$ , on note  $H_n := H - S_n$  l'espace obtenu en privant la boucle  $H$  du cercle de centre  $(0, 1/n)$  et de rayon  $1/n$ . On note  $X_n$  l'espace obtenu en recollant en chaque point entier de  $\mathbb{R}$  une copie de  $\overline{H_n}$  en son point de base  $x$ .



1. Montrer qu'il existe un revêtement  $p_n : X_n \rightarrow H$ , unique à isomorphisme de revêtement près, tel que la restriction de  $p_n$  à chaque copie de  $\overline{H_n}$  soit un homéomorphisme sur son image, et la restriction de  $p_n$  à  $\mathbb{R}$  soit un revêtement de  $S_n$ . Montrer que  $p_n$  et  $p_m$  sont deux revêtements de  $B$  non isomorphes pour  $n \neq m$ .
2. Pour toute suite  $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dans  $\{-1, +1\}$ , notons  $c_{(\epsilon_i)}$  le lacet dans  $H$  en  $x$  dont la restriction à l'intervalle  $[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$  vaut  $t \mapsto \frac{1}{n}(e^{\epsilon_n 2i\pi 2^{n+1}t} + 1)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En d'autres termes, il parcourt le cercle  $S_n$  à vitesse  $2^{n+1}$  dans le sens positif si  $\epsilon_n = 1$ , et négatif sinon.
  - (a) Vérifier que  $c_{(\epsilon_i)}$  est bien un lacet dans  $H$  en  $x$ .
  - (b) Montrer que si  $\epsilon_n \neq \epsilon'_n$ , alors les actions des lacets  $c_{(\epsilon_i)}$  et  $c_{(\epsilon'_i)}$  sur la fibre  $p_n^{-1}(x)$  du revêtement  $p_n$  sont différentes.
3. En déduire que le groupe fondamental de  $H$  est non dénombrable.

