

TD7 : Revêtements et groupes fondamentaux

Applications du cours ★ *à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
 Pour s'entraîner et approfondir ★★ *à traiter pendant la séance*
 Pour aller plus loin ★★★ *facultatifs*

Exercice 1. Échauffement ★

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que \mathbb{R}^2 n'est pas homéomorphe à \mathbb{R}^n pour $n \neq 2$.
2. Soit X un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs de groupe fondamental fini. Montrer que toute application continue $X \rightarrow \mathbb{S}^1$ est homotope à une application constante.
3. Calculer à l'aide d'un revêtement universel, le groupe fondamental de la sphère \mathbb{S}^1 et de l'espace projectif $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 2. Classification complète ★

Décrire à isomorphisme près tous les revêtements connexes des espaces suivants.

- (a) Le cercle \mathbb{S}^1 ;
- (b) Le bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ (uniquement ceux à deux feuilletts) ;
- (c) L'espace projectif réel $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ pour $n \geq 2$;
- (d) Le tore \mathbb{T} ;
- (e) Le ruban de Möbius M .

Exercice 3. Bouquet de deux plans projectifs ★

1. Déterminer le groupe fondamental du bouquet de deux plans projectifs $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \vee \mathbb{R}\mathbb{P}^2$.
2. Décrire, à isomorphisme près, tous les revêtements connexes de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \vee \mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

Exercice 4. Graphes et groupes libres ★★

On appelle *graphe fini* \mathcal{G} la donnée d'un ensemble fini de sommets S , et d'un ensemble fini d'arêtes $A \subseteq S \times S$. La réalisation topologique de \mathcal{G} est le quotient de

$$\coprod_{s \in S} \{s\} \coprod_{a \in A} [0, 1] \times \{a\}$$

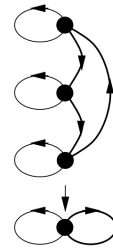
par les relations $(1, a) = p_2(a)$ et $(0, a) = p_1(a)$, où p_i est la i -ème projection $A \rightarrow S$ pour $i = 1, 2$. On ne fera pas de différence par la suite entre graphe et l'espace topologique qui lui est associé.

1. Montrer que tout revêtement à fibres finies d'un graphe fini est encore un graphe fini.
2. On appelle caractéristique d'Euler d'un graphe fini connexe \mathcal{G} l'entier $\chi(\mathcal{G}) = \#S - \#A$.
Montrer qu'un graphe fini connexe \mathcal{G} est homotope au bouquet de $1 - \chi(\mathcal{G})$ cercles.
3. Soit L un groupe libre à $n \geq 1$ générateurs, et H un sous-groupe d'indice k de L . Montrer que H est un groupe libre, dont on donnera le nombre de générateurs.
4. Soit $n \geq 3$. Montrer que le groupe libre à 2 générateurs admet un sous-groupe isomorphe au groupe libre à n générateurs. Donner des générateurs d'un tel sous-groupe pour $n = 3$.

Exercice 5. Bouquets de cercles ★★

Soit $k \geq 1$ un entier.

1. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements connexes à 2 feuillets du bouquet de k cercles ?
2. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements galoisiens à 3 feuillets du bouquet de k cercles ?
3. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements à 3 feuillets du bouquet de 2 cercles ? Les dessiner.



Exercice 6. Espaces topologiques finis ★★

1. Montrer que tout espace topologique fini et connexe par arcs de cardinal 2 ou 3 est simplement connexe.
2. On considère l'espace topologique X de cardinal 4 donné par l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ avec pour base d'ouverts

$$\{\{a\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}.$$

Montrer que X n'est pas simplement connexe en construisant un revêtement non-trivial. Déterminer le groupe fondamental de X , et tous les espaces topologiques connexes par arcs qui revêtent X .

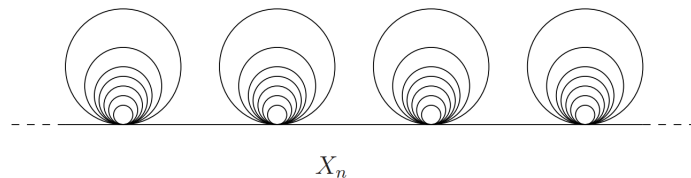
3. Construire un espace topologique fini connexe par arcs dont le groupe fondamental ne soit pas abélien.

Exercice 7. Le retour de la boucle d'oreille hawaïenne ★★★

Extrait de l'exercice E.26 du polycopié "Topologie algébrique élémentaire", Frédéric Paulin

On rappelle que la boucle d'oreille hawaïenne est le sous-ensemble $H \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des cercles S_n de centre $(0, 1/n)$ et de rayon $1/n$, pour les entiers $n \geq 1$. On note x le point de base commun à chacun des cercles.

Pour tout n , on note $H_n := H - S_n$ l'espace obtenu en privant la boucle H du cercle de centre $(0, 1/n)$ et de rayon $1/n$. On note X_n l'espace obtenu en recollant en chaque point entier de \mathbb{R} une copie de $\overline{H_n}$ en son point de base x .



1. Montrer qu'il existe un revêtement $p_n : X_n \rightarrow H$, unique à isomorphisme de revêtement près, tel que la restriction de p_n à chaque copie de $\overline{H_n}$ soit un homéomorphisme sur son image, et la restriction de p_n à \mathbb{R} soit un revêtement de S_n . Montrer que p_n et p_m sont deux revêtements de B non isomorphes pour $n \neq m$.
2. Pour toute suite $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\{-1, +1\}$, notons $c_{(\epsilon_i)}$ le lacet dans H en x dont la restriction à l'intervalle $[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$ vaut $t \mapsto \frac{1}{n}(e^{\epsilon_n 2i\pi 2^{n+1}t} + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, il parcourt le cercle S_n à vitesse 2^{n+1} dans le sens positif si $\epsilon_n = 1$, et négatif sinon.
 - (a) Vérifier que $c_{(\epsilon_i)}$ est bien un lacet dans H en x .
 - (b) Montrer que si $\epsilon_n \neq \epsilon'_n$, alors les actions des lacets $c_{(\epsilon_i)}$ et $c_{(\epsilon'_i)}$ sur la fibre $p_n^{-1}(x)$ du revêtement p_n sont différentes.
3. En déduire que le groupe fondamental de H est non dénombrable.

