TD7 : Revêtements et groupes fondamentaux

Applications du cours $\star$	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir $\star\star$	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin $\star\star\star$	*facultatifs*

Exercice 1. Échauffement $\star$

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour $n \neq 2$.
2. Soit X un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs de groupe fondamental fini. Montrer que toute application continue $X \to \mathbb{S}^1$ est homotope à une application constante.
3. Calculer à l'aide d'un revêtement universel, le groupe fondamental de la sphère $\mathbb{S}^1$ et de l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 2. Classification complète $\star$

Décrire à isomorphisme près tous les revêtements connexes des espaces suivants.

(a) Le cercle $\mathbb{S}^1$;

(b) Le bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ (uniquement ceux à deux feuillets) ;

(c) L'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$ pour $n \geq 2$;

(d) Le tore $\mathbb{T}$;

(e) Le ruban de Möbius $\mathbb{M}$.

Exercice 3. Bouquet de deux plans projectifs $\star$

1. Déterminer le groupe fondamental du bouquet de deux plans projectifs $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$.
2. Décrire, à isomorphisme près, tous les revêtements connexes de $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$.

Exercice 4. Graphes et groupes libres $\star\star$

On appelle *graphe fini* $\mathcal{G}$ la donnée d'un ensemble fini de sommets S, et d'un ensemble fini d'arêtes $A \subseteq S \times S$. La réalisation topologique de $\mathcal{G}$ est le quotient de

$$\coprod_{s \in S} \{s\} \coprod_{a \in A} [0,1] \times \{a\}$$

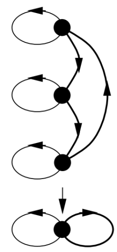
par les relations $(1,a) = p_2(a)$ et $(0,a) = p_1(a)$, où p_i est la i-ème projection $A \to S$ pour $i = 1, 2$. On ne fera pas de différence par la suite entre graphe et l'espace topologique qui lui est associé.

1. Montrer que tout revêtement à fibres finies d'un graphe fini est encore un graphe fini.
2. On appelle caractéristique d'Euler d'un graphe fini connexe $\mathcal{G}$ l'entier $\chi(\mathcal{G}) = \#S - \#A$.

   Montrer qu'un graphe fini connexe $\mathcal{G}$ est homotope au bouquet de $1 - \chi(\mathcal{G})$ cercles.
3. Soit L un groupe libre à $n \geq 1$ générateurs, et H un sous-groupe d'indice k de L. Montrer que H est un groupe libre, dont on donnera le nombre de générateurs.
4. Soit $n \geq 3$. Montrer que le groupe libre à 2 générateurs admet un sous-groupe isomorphe au groupe libre à n générateurs. Donner des générateurs d'un tel sous-groupe pour $n = 3$.

Exercice 5. Bouquets de cercles ⋆⋆

Soit $k \geq 1$ un entier.



1. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements connexes à 2 feuillets du bouquet de k cercles ?
2. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements galoisiens à 3 feuillets du bouquet de k cercles ?
3. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements à 3 feuillets du bouquet de 2 cercles ? Les dessiner.

Exercice 6. Espaces topologiques finis ⋆⋆

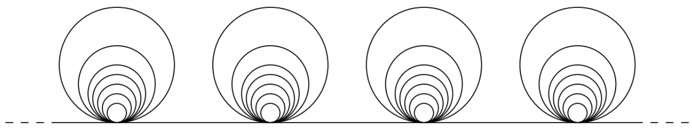
1. Montrer que tout espace topologique fini et connexe par arcs de cardinal 2 ou 3 est simplement connexe.
2. On considère l'espace topologique X de cardinal 4 donné par l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ avec pour base d'ouverts
$$\{\{a\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}\,.$$
Montrer que X n'est pas simplement connexe en construisant un revêtement non-trivial. Déterminer le groupe fondamental de X, et tous les espaces topologiques connexes par arcs qui revêtent X.
3. Construire un espace topologique fini connexe par arcs dont le groupe fondamental ne soit pas abélien.

Exercice 7. Le retour de la boucle d'oreille hawaïenne ⋆⋆⋆

Extrait de l'exercice E.26 du polycopié "Topologie algébrique élémentaire", Frédéric Paulin

On rappelle que la boucle d'oreille hawaïenne est le sous-ensemble $H \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des cercles S_n de centre $(0, 1/n)$ et de rayon $1/n$, pour les entiers $n \geq 1$. On note x le point de base commun à chacun des cercles.

Pour tout n, on note $H_n := H - S_n$ l'espace obtenu en privant la boucle H du cercle de centre $(0, 1/n)$ et de rayon $1/n$. On note X_n l'espace obtenu en recollant en chaque point entier de $\mathbb{R}$ une copie de $\overline{H_n}$ en son point de base x.



X_n

1. Montrer qu'il existe un revêtement $p_n : X_n \to H$, unique à isomorphisme de revêtement près, tel que la restriction de p_n à chaque copie de $\overline{H_n}$ soit un homéomorphisme sur son image, et la restriction de p à $\mathbb{R}$ soit un revêtement de $\S_n$. Montrer que p_n et p_m sont deux revêtements de B non isomorphes pour $n \neq m$.
2. Pour toute suite $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $\{-1, +1\}$, notons $c_{(\epsilon_i)}$ le lacet dans H en x dont la restriction à l'intervalle $\left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n}\right]$ vaut $t \mapsto \frac{1}{n}(e^{\epsilon_n 2i\pi 2^{n+1}t} + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, il parcourt le cercle S_n à vitesse 2^{n+1} dans le sens positif si $\epsilon_n = 1$, et négatif sinon.
   (a) Vérifier que $c_{(\epsilon_i)}$ est bien un lacet dans H en x.
   (b) Montrer que si $\epsilon_n \neq \epsilon'_n$, alors les actions des lacets $c_{(\epsilon_i)}$ et $c_{(\epsilon'_i)}$ sur la fibre $p_n^{-1}(x)$ du revêtement p_n sont différentes.
3. En déduire que le groupe fondamental de H est non dénombrable.