TD8 : Algèbre homologique

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆ ⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆ ⋆ ⋆	*facultatifs*

Exercice 1. Le lemme des cinq ⋆

Soit R un anneau commutatif. Une suite (finie ou infinie) R-modules et de morphismes de R-modules

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-1}} C_i \xrightarrow{f_i} C_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} C_{i+2} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots$$

est dite *exacte* si $\text{Ker } f_i = \text{Im } f_{i-1}$ pour tout i. Considérons un diagramme commutatif de R-modules

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & G_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & G_3 \arrow[r, "a_3"] \arrow[d, "\varphi_3"] & G_4 \arrow[r, "a_4"] \arrow[d, "\varphi_4"] & G_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
H_1 \arrow[r, "b_1"] & H_2 \arrow[r, "b_2"] & H_3 \arrow[r, "b_3"] & H_4 \arrow[r, "b_4"] & H_5
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes.

1. Montrer que si φ_1 est surjective et φ_2 et φ_4 sont injectives alors φ_3 est injective.
2. Montrer que si φ_5 est injective et φ_2 et φ_4 sont surjectives alors φ_3 est surjective.
3. En déduire que si φ_1, φ_2, φ_4 et φ_5 sont des isomorphismes, alors φ_3 également.

Exercice 2. Le lemme du serpent ⋆

1. Soit R un anneau commutatif. Pour tout morphisme de R-module $\alpha : A \to A'$, on note $\iota_\alpha : \text{Ker } \alpha \hookrightarrow A$ l'inclusion du noyau et $\pi_\alpha : A' \to \text{Coker } \alpha$ la projection sur le conoyau $\text{Coker } \alpha = A'/(\text{Im } \alpha)$. Montrer qu'étant donné un carré commutatif de R-modules

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\
A' \arrow[r, "g"] & B'
\end{tikzcd}$$

on peut le compléter d'une seule manière en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \text{Ker } \alpha \arrow[r, "\iota_\alpha"] \arrow[d] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & A' \arrow[r, "\pi_\alpha"] \arrow[d, "g"] & \text{Coker } \alpha \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \text{Ker } \beta \arrow[r, "\iota_\beta"] & B \arrow[r, "\beta"] & B' \arrow[r, "\pi_\beta"] & \text{Coker } \beta \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

2. Soit un diagramme commutatif de R-modules

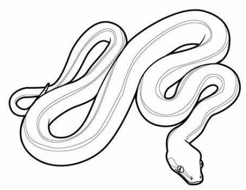
$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "g"] & B' \arrow[r, "k"] & C' &
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Montrer qu'il existe un morphisme $\delta : \text{Ker } \gamma \to \text{Coker } \alpha$ qui rend la suite

$$\text{Ker } \alpha \longrightarrow \text{Ker } \beta \longrightarrow \text{Ker } \gamma \xrightarrow{\delta} \text{Coker } \alpha \longrightarrow \text{Coker } \beta \longrightarrow \text{Coker } \gamma$$

est exacte.

3. Montrer que si de plus $A \to B$ est injective alors $\mathrm{Ker}\,\alpha \to \mathrm{Ker}\,\beta$ l'est aussi, et si $B' \to C'$ est surjective alors $\mathrm{Coker}\,\beta \to \mathrm{Coker}\,\gamma$ l'est aussi.



Exercice 3. Sommes directes de complexes ⋆

Un *complexe de chaînes* (C_*, d_*) est une suite de groupes abéliens (ou R-modules)

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

munie d'applications linéaires, appelées *différentielles*, $d_n : C_n \to C_{n-1}$ telles que :

$$d_n \circ d_{n+1} = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Autrement dit, la composition de deux différentielles consécutives est nulle : $d^2 = 0$. L'*homologie* du complexe (C_*, d_*) en degré n est le groupe quotient :

$$H_n(C_*) = \frac{\mathrm{Ker}\ d_n}{\mathrm{Im}\ d_{n+1}}.$$

Les éléments de $\ker d_n$ sont appelés les *cycles* de degré n, et les éléments de $\operatorname{im} d_{n+1}$ sont appelés les *bord* de degré n. Soient (C, d) et (C', d') deux complexes de chaînes. On définit le complexe somme directe par

$$(C, d) \oplus (C', d') = (C \oplus C', d \oplus d').$$

Montrer que $H_*((C, d) \oplus (C', d')) \simeq H_*(C, d) \oplus H_*(C', d')$.

Exercice 4. Complexes sur un corps ⋆

Soit k un corps.

1. Soit C un complexe de chaînes de k-espaces vectoriels. Construire une équivalence d'homotopie entre C et $H_*(C)$, ce dernier étant vu comme un complexe à différentielles nulles.
2. Soit $f : C \to D$ un morphisme de complexes de chaînes sur k qui induit un isomorphisme en homologie. Montrer que f est une équivalence d'homotopie.

Exercice 5. Suites exactes courtes ⋆ ⋆

On considère une suite exacte courte de groupes abéliens donnée par :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\simeq"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\simeq"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & A \oplus C \arrow[r, "q"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   dont les morphismes verticaux sont des isomorphismes, et où $i : A \to A \oplus C$ est l'inclusion canonique et $q : A \oplus C \to C$ la projection sur le facteur direct C.
   (b) Il existe un morphisme $s : C \to B$ tel que $g \circ s = \mathrm{Id}$.
   (c) Il existe un morphisme $r : B \to A$ tel que $r \circ f = \mathrm{Id}$.

   On dit dans ce cas que la suite exacte est *scindée*.
2. Montrer que si C est un groupe abélien libre, alors les conditions précédentes sont satisfaites.

Exercice 6. Exemples élémentaires de complexes ⋆⋆

1. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de groupes abéliens.
   (a) Construire un complexe de groupes abéliens C_* tel que $H_n(C_*) = A_n$.
   (b) Même question en imposant de plus que les C_i soient des groupes abéliens libres.
2. Construire un complexe de groupes abéliens C_* tel que les C_i ne soient pas des groupes abéliens de type fini, mais dont tous les groupes d'homologie $H_k(C)$ soient des groupes abéliens de type fini.

Exercice 7. Caractéristique d'Euler d'un complexe ⋆⋆

Soit k un corps, et soit C_* un complexe de k-espaces vectoriels de dimension finie tel que $C_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i. On appelle caractéristique d'Euler de C_* le nombre

$$\chi(C) = \sum_n (-1)^n \dim_k H_n(C)\ .$$

Montrer que $\chi(C) = \sum_n (-1)^n \dim_k C_n$.

Exercice 8. Cohomologie des groupes ⋆⋆⋆

Soit G un groupe, et soit M un groupe abélien muni d'une action linéaire de G, qu'on note $\bullet$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $C_{-n}(G, M)$ le groupe abélien des fonctions de G^n dans M (par convention $G^0 = 1$). Pour tout entier strictement négatif n, on pose $C_{-n}(G, M) = 0$. On définit un morphisme de groupes abéliens

$$\partial_{-n} : C_{-n}(G, M) \to C_{-n-1}(G, M)$$

de la façon suivante : pour toute fonction $f : G^n \to M$, la fonction $\partial_{-n} f : G^{n+1} \to M$ est donnée par la formule :

$$(\partial_{-n} f)(g_1, \cdots, g_{n+1}) := g_1 \bullet f(g_2, \cdots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \cdots, g_n).$$

1. Montrer que $(C_*(G, M), \partial)$ est un complexe. Le $(-n)$-ième groupe d'homologie de $(C_*(G, M), \partial)$ s'appelle le n-ième groupe de cohomologie de G à valeurs dans M et noté $H^n(G, M)$.
2. Montrer que $H^0(G, M)$ est isomorphe au sous-groupe abélien de M formé des points fixes sous l'action du groupe G.
3. On suppose que la représentation M est munie de l'action triviale de G. Montrer que $H^1(G, M)$ est isomorphe au groupe abélien formé des morphismes de groupes de G dans M.
4. Montrer que si on a trois représentations M', M, M'' de G, et une suite exacte courte de représentations
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$
alors on a une suite exacte longue en cohomologie associée :
$$0 \to H^0(G, M') \to H^0(G, M) \to H^0(G, M'') \to H^1(G, M') \to \cdots$$