

TD8 : Algèbre homologique

- Applications du cours ★ *à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
 Pour s'entraîner et approfondir ★★ *à traiter pendant la séance*
 Pour aller plus loin ★★★ *facultatifs*

Exercice 1. Le lemme des cinq ★

Soit R un anneau commutatif. Considérons un diagramme commutatif de R -modules

$$\begin{array}{ccccccccc}
 G_1 & \xrightarrow{a_1} & G_2 & \xrightarrow{a_2} & G_3 & \xrightarrow{a_3} & G_4 & \xrightarrow{a_4} & G_5 \\
 \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\
 H_1 & \xrightarrow{b_1} & H_2 & \xrightarrow{b_2} & H_3 & \xrightarrow{b_3} & H_4 & \xrightarrow{b_4} & H_5
 \end{array}$$

où les lignes sont exactes.

1. Montrer que si φ_1 est surjective et φ_2 et φ_4 sont injectives alors φ_3 est injective.
2. Montrer que si φ_5 est injective et φ_2 et φ_4 sont surjectives alors φ_3 est surjective.
3. En déduire que si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ et φ_5 sont des isomorphismes, alors φ_3 également.

Exercice 2. Le lemme du serpent ★

1. Soit R un anneau commutatif. Montrer qu'étant donné un carré commutatif de R -modules

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\
 A' & \xrightarrow{g} & B'
 \end{array}$$

on peut le compléter d'une seule manière en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \alpha & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & A' & \longrightarrow & \text{Coker } \alpha & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \beta & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\beta} & B' & \longrightarrow & \text{Coker } \beta & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

2. Soit un diagramme commutatif de R -modules

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{h} & C & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{g} & B' & \xrightarrow{k} & C'
 \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Montrer qu'il existe un morphisme $\delta : \text{Ker } \gamma \rightarrow \text{Coker } \alpha$ qui rend la suite

$$\text{Ker } \alpha \longrightarrow \text{Ker } \beta \longrightarrow \text{Ker } \gamma \xrightarrow{\delta} \text{Coker } \alpha \longrightarrow \text{Coker } \beta \longrightarrow \text{Coker } \gamma$$

est exacte.

3. Montrer que si de plus $A \rightarrow B$ est injective alors $\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta$ l'est aussi, et si $B' \rightarrow C'$ est surjective alors $\text{Coker } \beta \rightarrow \text{Coker } \gamma$ l'est aussi.



Exercice 3. Sommes directes de complexes *

Soient (C, ∂) et (C', ∂') deux complexes de chaînes. On définit le complexe somme directe par

$$(C, \partial) \oplus (C', \partial') = (C \oplus C', \partial \oplus \partial').$$

Montrer que $H_*((C, \partial) \oplus (C', \partial')) \simeq H_*(C, \partial) \oplus H_*(C', \partial')$.

Exercice 4. Complexes sur un corps *

Soit k un corps.

1. Soit C un complexe de chaînes sur k . Construire une équivalence d'homotopie entre C et $H_*(C)$, ce dernier étant vu comme un complexe à différentielles nulles.
2. Soit $f : C \rightarrow D$ un morphisme de complexes de chaînes sur k qui induit un isomorphisme en homologie. Montrer que f est une équivalence d'homotopie.

Exercice 5. Suites exactes courtes **

On considère une suite exacte courte de groupes abéliens donnée par :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & A \oplus C & \xrightarrow{q} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les morphismes verticaux sont des isomorphismes, et où $i : A \rightarrow A \oplus C$ est l'inclusion canonique et $q : A \oplus C \rightarrow C$ la projection sur le facteur direct C .

- (b) Il existe un morphisme $s : C \rightarrow B$ tel que $g \circ s = \text{Id}$.
- (c) Il existe un morphisme $r : B \rightarrow A$ tel que $r \circ f = \text{Id}$.

On dit dans ce cas que la suite exacte est *scindée*.

2. Montrer que si C est un groupe abélien libre, alors les conditions précédentes sont satisfaites.

Exercice 6. Exemples élémentaires de complexes **

1. Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite de groupes abéliens.
 - (a) Construire un complexe de groupes abéliens C_* tel que $H_n(C_*) = A_n$.
 - (b) Même question en imposant de plus que les C_i soient des groupes abéliens libres.
2. Construire un complexe de groupes abéliens C_* tel que les C_i ne soient pas des groupes abéliens de type fini, mais dont tous les groupes d'homologie $H_k(C)$ soient des groupes abéliens de type fini.

Exercice 7. Caractéristique d'Euler d'un complexe **

Soit k un corps, et soit C_* un complexe de k -espaces vectoriels de dimension finie tel que $C_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i . On appelle caractéristique d'Euler de C_* le nombre

$$\chi(C) = \sum_n (-1)^n \dim_k H_n(C).$$

Montrer que $\chi(C) = \sum_n (-1)^n \dim_k C_n$.

Exercice 8. Cohomologie des groupes ★★★

Soit G un groupe, et soit M un groupe abélien muni d'une action linéaire de G , qu'on note \bullet . Pour tout entier $n \geq 0$, on note $C_{-n}(G, M)$ le groupe abélien des fonctions de G^n dans M (par convention $G^0 = 1$). Pour tout entier strictement négatif n , on pose $C_{-n}(G, M) = 0$. On définit un morphisme de groupes abéliens

$$\partial_{-n} : C_{-n}(G, M) \rightarrow C_{-n-1}(G, M)$$

de la façon suivante : pour toute fonction $f : G^n \rightarrow M$, la fonction $\partial_{-n}f : G^{n+1} \rightarrow M$ est donnée par la formule :

$$(\partial_{-n}f)(g_1, \dots, g_{n+1}) := g_1 \bullet f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n).$$

1. Montrer que $(C_*(G, M), \partial)$ est un complexe. Le $(-n)$ -ième groupe d'homologie de $(C_*(G, M), \partial)$ s'appelle le n -ième groupe de cohomologie de G à valeurs dans M et noté $H^n(G, M)$.
2. Montrer que $H^0(G, M)$ est isomorphe au sous-groupe abélien de M formé des points fixes sous l'action du groupe G .
3. On suppose que la représentation M est munie de l'action triviale de G . Montrer que $H^1(G, M)$ est isomorphe au groupe abélien formé des morphismes de groupes de G dans M .
4. Montrer que si on a trois représentations M', M, M'' de G , et une suite exacte courte de représentations

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0,$$

alors on a une suite exacte longue en cohomologie associée :

$$0 \rightarrow H^0(G, M') \rightarrow H^0(G, M) \rightarrow H^0(G, M'') \rightarrow H^1(G, M') \rightarrow \dots$$

