TD9 : Homologie singulière I

Applications du cours $\star$	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir $\star\star$	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin $\star\star\star$	*facultatifs*

Exercice 1. Premiers calculs d'homologie $\star$

Soient X un espace topologique non-vide et R un groupe abélien.

1. Si X est un point, déterminer $H_n(X;R)$ pour tout $n \geq 0$.
2. Soit $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. Montrer que $H_0(X;R) \simeq \bigoplus_{s\in\pi_0(X)} R$.
3. Montrer que si $X = \sqcup_{i\in I} X_i$ est la partition de X en ses composantes connexes par arcs, on a, pour tout $n \geq 0$,
$$H_n(X;R) = \oplus_{i\in I} H_n(X_i;R) \ .$$

Exercice 2. Homologie d'une paire $\star$

Soit (X, A) une paire topologique.

1. Montrer que $H_0(X, A; R) = 0$ si et seulement si A intersecte de manière non-vide toutes les composantes connexes par arcs de X.
2. Montrer que $H_1(X, A; R) = 0$ si et seulement si l'application $H_1(A; R) \to H_1(X; R)$ est surjective et toute composante connexe par arcs de X contient au plus une composante connexe par arcs de A.
3. On suppose que A est un point. Calculer *l'homologie réduite* $H_*(X, A; R)$ en fonction de l'homologie de X.
4. Montrer que l'inclusion $A \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homologie si et seulement si les groupes d'homologie relatifs de la paire (X, A) sont tous nuls.
5. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques telle que A soit un rétract de X. Montrer que l'application $H_n(A; R) \to H_n(X; R)$ induite par l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est injective.

Exercice 3. Le théorème d'écrasement et bonnes paires $\star$

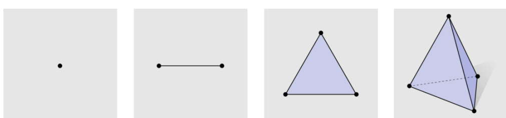
Une paire d'espaces topologiques (X, A) est une *bonne paire* si et seulement si A est fermé, non vide et rétracte par déformation d'un voisinage dans X. Notez qu'un espace topologique pointé (X, x) induit une bonne paire $(X, \{x\})$ si et seulement s'il est correctement pointé.

Théorème d'écrasement : Soient (X, A) une bonne paire. Alors il existe un isomorphisme

$$H_i(X, A) \cong H_i(X/A, \{A\}) = \widetilde{H}_i(X/A) \ ,$$

où $\{A\} \subset X/A$ est le singleton constitué du point qui correspond au sous-espace $A \subset X$.

1. Montrer le théorème d'écrasement dans le cas où $A \subset X$ est un rétracte par déformation forte.
Indice. On pourra utiliser le théorème d'excision.
2. Montrer que si X est un CW-complexe et $A \subset X$ un sous-complexe de X, alors (X, A) est une bonne paire. (*à traiter pendant la séance*)



Exercice 4. Théorème de Hurewicz ⋆

Soit X un espace topologique. On note $C_2(X;\mathbb{Z})$ le groupe des 2-chaînes singulières de X. On rappelle qu'un chemin $\gamma : [0,1] \to X$ peut être vu comme un 1-simplexe singulier de X, qui sera un 1-cycle si et seulement si γ est un lacet.

1. Soit α un chemin constant. Montrer qu'il est égal au bord d'une certaine 2-chaîne singulière.
2. Soient $\alpha : [0,1] \to X$ et $\beta : [0,1] \to X$ des chemins tels que $\alpha(1) = \beta(0)$, de sorte qu'on puisse considérer le chemin $\alpha\beta$ obtenu par concaténation. Montrer qu'il existe une 2-chaîne singulière $c \in C_2(X;\mathbb{Z})$ telle que $\alpha\beta = \alpha + \beta + \partial c$.
3. Soient $\alpha : [0,1] \to X$ et $\beta : [0,1] \to X$ des chemins homotopes (à extrémités fixes). Montrer que $\alpha - \beta$ est le bord d'une 2-chaîne singulière.
4. On fixe un point $x_0 \in X$. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes bien défini
$$\phi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X;\mathbb{Z})$$
envoyant la classe d'homotopie d'un lacet de base x_0 sur la classe d'homologie du 1-cycle correspondant. Ce morphisme est appelé le *morphisme de Hurewicz*.
5. On suppose maintenant que X est connexe par arcs. Montrer qu'alors ce morphisme induit un isomorphisme entre $H_1(X;\mathbb{Z})$ et l'abélianisé de $\pi_1(X, x_0)$ (c'est-à-dire le quotient de $\pi_1(X, x_0)$ par le sous-groupe engendré par tous les commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$).

Exercice 5. Applications de paires ⋆ ⋆

Soient (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques, et soient $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ des applications continues. On suppose que f et g sont homotopes en tant qu'applications de paires. Montrer que pour tout entier $k \geq 0$, les morphismes
$$f_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B) \quad \text{et} \quad g_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$$
coïncident.

Exercice 6. Paires de Borsuk ⋆ ⋆

Une paire d'espaces topologiques (X, A) est une *paire de Borsuk* si et seulement si toute application continue $H : (X \times 0) \cup (A \times I) \to Y$ s'étend en une application $\bar{H} : X \times I \to Y$. Cette propriété s'appelle la *propriété d'extension des homotopies.*

1. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) (X, A) est une paire de Borsuk ;
   (b) $(X \times 0) \cup (A \times I) \subset X \times I$ est un rétracte ;
   (c) $(X \times 0) \cup (A \times I) \subset X \times I$ est un rétracte par déformation.
2. Montrer que si X est séparé et (X, A) est une paire de Borsuk alors A est fermé dans X.
3. Montrer que si (X, A) est une paire de Borsuk, alors il en est de même pour $(Y \times X, Y \times A)$ quel que soit Y.
4. Montrer que si X est un CW-complexe et $A \subset X$ un sous-complexe, alors (X, A) est une paire de Borsuk.
5. Soit (X, A) une paire de Borsuk et $f : A \to Y$ et $g : A \to Y$ deux applications homotopes. Montrer que $X \cup_f Y := X \sqcup Y/\{x \sim f(x)\}$ est homotopiquement équivalent à $X \cup_g Y$.
Indice. On pourra considérer l'espace $(X \times I) \cup_h Y$ où h est une homotopie entre f et g.
6. Soit X le cercle $\mathbb{S}^1$ avec deux disques D^2 attachés via des applications $f, g : \partial D^2 \to S^1$,
$$f : z \mapsto z^2 \quad \text{and} \quad g : z \mapsto z^3 \ .$$
Montrer que X est homotopiquement équivalent à S^2. Est-ce que X est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$?

Exercice 7. Cônes et équivalences d'homologie ⋆⋆⋆

Soit (C_*, ∂) un complexe de chaînes de groupes abéliens. La *suspension* de (C_*, ∂) est le complexe de chaînes $(sC_*, -\partial)$ défini par $sC_0 = 0$ et $sC_{i+1} = C_i$ pour tout $i \geq 0$.

Soit $f : C_* \to D_*$ un morphisme de complexes de chaînes de groupes abéliens. Le *cône* de f est le complexe de chaînes noté $C_*(f)$, défini par : $C_0(f) = D_0$, $C_{i+1} = C_i \oplus D_{i+1}$ pour $i \geq 0$, et la différentielle envoie $(x, y) \in C_i \oplus D_{i+1}$ sur $(-\partial x, \partial y + f(x)) \in C_{i-1} \oplus D_i$.

1. Vérifier que $C(f)_*$ est bien un complexe de chaînes.
2. Montrer qu'on a une suite exacte courte de complexes
$$0 \to D_* \to C(f)_* \to (sC)_* \to 0.$$
3. En déduire une suite exacte longue en homologie
$$\cdots \to H_i(D_*) \to H_i(C(f)_*) \to H_i((sC)_*) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(D_*) \to \cdots$$
et tel que le connectant δ soit égal à $H_{i-1}(f)$, l'application induite par f en homologie.
4. Montrer que f induit un isomorphisme en homologie si, et seulement si, le cône de f a une homologie triviale.

   On dit qu'un complexe est contractile si son application identité est homotope à l'application nulle. On suppose par la suite que $C(f)_*$ est contractile.
5. Montrer que l'injection $D_* \to C(f)_*$ est homotope à zéro. En déduire que f admet un inverse homotopique à droite.
6. Montrer que la surjection $C(f)_* \to sC_*$ est homotope à zéro. En déduire que f admet un inverse homotopique à gauche, puis que f est un équivalence d'homotopie.